Landesinstitut für Schulentwicklung

Berufliche Schulen

Innovativer Bildungsservice

Berufliches Gymnasium

Jahrgangsstufen 1 und 2

Mathe+

Stuttgart 2015

Landesinstitut für Schulentwicklung

Qualitätsentwicklung und Evaluation

Schulentwicklung und empirische Bildungsforschung Schulentwicklung

Bildungspläne

Inhaltsverzeichnis Handreichung Mathe+

1. Didaktische Hinweise

Die Aussagenlogik ist in der Lehrplaneinheit 1, Grundlagen der Mengenlehre, als Themengebiet aufgeführt. Während die Schülerinnen und Schüler durch das Fach Mathematik über Primärstrukturen in der Mengenlehre verfügen, ist die Aussagenlogik ein Gebiet ohne zu erwartende Grundkenntnisse. Je nach Kurssituation ist eine Erarbeitung im Kursverband oder eine Erarbeitung mit Fokus auf selbstständiges Lernen durch die Schülerinnen und Schüler möglich. In den Unterrichtsmaterialien werden diese zwei Vorgehensweisen zur Verfügung gestellt.

Variante 1: Erarbeitung im Kursverband

Variante 2: Selbstständige Erarbeitung

Unter „Weitere Materialien (Links)“ findet man auch diverse Videos, die in der Erarbeitung des Themengebiets eingesetzt werden können.

2. Methodische Hinweise

Im Folgenden werden die methodischen Hinweise für die beiden Varianten separat angeführt.

Variante 1 - Methodische Hinweise:

In dieser Variante wird das Thema im Lehrer-Schüler-Gespräch zusammen erarbeitet. Das Arbeitsblatt gibt die Struktur vor und bietet Raum, die gemeinsam gewonnen Erkenntnisse einzutragen. Schülerinnen und Schüler lernen die neuen Bezeichnungen kennen und werden angehalten, diese selber zu schreiben. Hier kann der Lehrer gut auf die handschriftliche Schreibweise eingehen. Auf diese Weise können Schülerinnen und Schüler Zwischenfragen stellen, die sofort im Plenum beantwortet werden.
Weitere Vertiefung und Festigung kann mit weiteren Übungsaufgaben erfolgen. Unter „Weitere Materialien (Links)“ findet man ebenfalls mögliche Übungsaufgaben.

Variante 2 - Methodische Hinweise:

Die Klärung der Begrifflichkeiten Aussage und Aussageform erfolgt zunächst in einer Stunde im Kursverband mit Einstiegsfolie, Tafelbild und Übungsaufgaben, bevor sich die Schülerinnen und Schüler die Teilthemen Negation, Konjunktion und Adjunktion, Implikation und Äquivalenz in einer Arbeitstheke selbstständig erarbeiten.

Die Gestaltung der Lernumgebung erfolgt unter Berücksichtigung der Handlungsorientierung mit folgenden Kriterien

- Förderung von Wissenskomponenten,
- Aktivitätsschwerpunkt liegt auf Seiten der Schülerinnen und Schüler,
- offene Gestaltung der Lernumgebung,

und verfolgt insbesondere im Rahmen der Arbeitstheke folgende Ziele

- individuelle Auseinandersetzung mit den Lerninhalten,
- selbstständige Zeiteinteilung und damit Lernen im individuellen Lerntempo innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens,
- individuelle Hilfe durch die Lehrperson während andere Schülerinnen und Schüler weiterarbeiten können.

Fokussiert wird folglich ein Training von selbstständigem und selbstverantwortlichem Lernen der Schülerinnen und Schüler.

Die Arbeitstheke stellt Arbeitsblätter mit „Infoboxen“ zur Verfügung, die den Theorieinput geben und diesen an Beispielen zusätzlich verdeutlichen. Im Anschluss an die Themenerkundung erfolgt jeweils eine Anwendung des neu erworbenen fachspezifischen Wissens in Übungsaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben durch eine eingerichtete Kontrollstation die Möglichkeit, ihre Ergebnisse selbstständig zu überprüfen bzw. ggf. zu korrigieren. Die Lehrperson steht zudem als möglicher Ansprechpartner zur Verfügung.
Die zugrundeliegenden Aktionsformen sind erarbeitend und entdecken-lassend. Als Sozialform bietet sich die Partnerarbeit an.
Zum Abschluss der Schülerarbeitsphase könnte ein Austausch im Plenum zu dem neu erworbenen Wissen sowie zu offenen Fragen erfolgen.
Weitere Vertiefung und Festigung kann mit weiteren Übungsaufgaben erfolgen. Unter „Weitere Materialien (Links)“ findet man ebenfalls mögliche Übungsaufgaben.

3. Fachliche Hinweise

Vor Behandlung der Aussagenlogik sollte die Mengenlehre mit Zahlenmengen, Mengenoperationen und Teilmengen sowie Schreibweisen Unterrichtsgegenstand gewesen sein.
Unter die Überschrift Aussagenlogik wären neben den im vorhandenen Material erarbeiteten Begrifflichkeiten auch Quantoren zu fassen. Die Behandlung von Quantoren ist im Lehrplan allerdings nicht explizit vorgesehen, natürlich könnte die Thematisierung dennoch erfolgen.
Weiterhin wäre ein Aufgreifen der De Morgan`schen Regeln in dieser Lehrplaneinheit möglich. Im Rahmen der zur Verfügung gestellten Übungsaufgaben zur Vertiefung und Festigung werden sie mittels Wahrheitstafeln im Übrigen auch behandelt.
Nach Behandlung der Aussagenlogik bietet es sich an, eine Brücke zur Mengenlehre zu schlagen. Dies könnte beispielsweise in einem Tafelbild zum Zusammenhang der mathematischen Logik und der Mengenlehre erfolgen.

4. Unterrichtsmaterialien

Arbeitsblätter zum Unterrichtsvorschlag der Variante 1
Einstiegsfolie, Tafelbild, Arbeitsblätter, Lösungsblätter zum Aushang an einer Kontrollstation zum Unterrichtsvorschlag der Variante 2
Übungsaufgaben zur Vertiefung und Festigung unabhängig von den Varianten

Weitere Materialien (Links)

Literatur/Aufgaben:

Jordan, J.: Einführung in die Mathematik (Vorkurs), Institut für Mathematik, Universität Würzburg, Wintersemester 2008/09 www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~jordan/Lehrealt/.../**VK08-Kap1**.pdf

Goldammer, E.V.: Vorlesung: Grundlagen der Informatik 2 - FH Dortmund ftp://www.inf.fh-dortmund.de/pub/contributors/schlichtherle/Literatur/Vortr%E4ge%20WS%202002-2003/Projektplanung/Erg%E4nzungen_Aufgaben_AL_01-L%F6sungen.pdf

Videos:

- Vorlesungsvideo der PH-Heidelberg: Mengen
- WIKIBOOKS: Mathe für Nicht-Freaks (Mengenlehre)
- iMPACt: Schülerarbeitsheft Grundlagenkurs
- CAPIRA Mengen und Zahlenbereiche
- Vorlesungsvideo der PH-Heidelberg: Aussagenlogik
- Vorlesungsvideo der PH-Heidelberg: Quantoren
- WIKIBOOKS: Mathe für Nicht-Freaks (Aussagenlogik)
- WIKIBOOKS: Mathe für Nicht-Freaks (Prädikatenlogik)
- iMPACt: Schülerarbeitsheft Grundlagenkurs

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende Aussagen.

p: „15 ist eine Primzahl“

q: „Jede Primzahl ist ungerade“

r: „2 ist eine Primzahl“

a) Formulieren Sie zu den Aussagen jeweils ihre Negation.

b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Wahrheitstafel.

(1) $p \wedge r$ (2) $p \vee r$

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Äquivalenzen und Gesetze mit Hilfe von Wahrheitstafeln. Finden Sie anschauliche Beispiele.

a) De Morgan’sche Gesetze

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

b) Umformulierung einer „Wenn-dann-Aussage“ (Kontraposition)

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

c) Transitivität der Implikation

$$\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Aufgabe 3

Anja sagt: „Beate sagt die Wahrheit.“

Beate sagt: „Christel lügt.“

Christel sagt: „Anja und Beate sagen beide die Wahrheit oder lügen beide.“

Wer lügt denn nun und wer sagt die Wahrheit? Erläutern Sie Ihre logischen Schlüsse.

Aufgabe 4

Beim Klassentreffen kommen vier ehemalige Mitschüler, Klaus, Lothar, Martin und Peter, zusammen. Einer von ihnen ist Architekt, einer Bauingenieur, einer Informatiker und der vierte Sozialpädagoge. Welchen Beruf übt jeder aus, wenn folgende Aussagen falsch sind?

- Martin ist kein Informatiker und auch nicht Bauingenieur.
- Martin ist kein Sozialpädagoge und Peter nicht Bauingenieur.
- Lothar ist Sozialpädagoge.

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1

a) $\neg p$: „15 ist keine Primzahl“

$\neg q$: „Nicht jede Primzahl ist ungerade“ (D.h. es gibt mindestens eine Primzahl, die gerade ist.)

$\neg r$: „2 ist keine Primzahl“

b) (1) $p \wedge r$ ist falsch, da p falsch ist. (2) $p \vee r$ ist wahr, da r wahr ist. *Kontrolle siehe Arbeitsblatt*

Aufgabe 2

a) De Morgan’sche Gesetze

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

w	w	w	**f**	**f**	f	f
w	f	f	**w**	**w**	w	f
f	w	f	**w**	**w**	f	w
f	f	f	**w**	**w**	w	w

$\Leftrightarrow$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

w	w	w	**f**	**f**	f	f
w	f	w	**f**	**f**	w	f
f	w	w	**f**	**f**	f	w
f	f	f	**w**	**w**	w	w

$\Leftrightarrow$

Schülerindividuelle Beispiele

a) Umformulierung einer „Wenn-dann-Aussage“ (Kontraposition)

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$$

w	w	**w**	**w**	f	f
w	f	**f**	**f**	w	f
f	w	**w**	**w**	f	w
f	f	**w**	**w**	w	w

⇔

Schülerindividuelle Beispiele

a) Transitivität der Implikation

$$\big((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)\big) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

q	r	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow r$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$	
w	w	w	w	w	
w	f	w	f	f	
f	w	f	w	f	
f	f	f	w	f	
w	w	w	w	w	
w	f	w	f	f	
f	w	w	w	w	
f	f	w	w	w	

Schülerindividuelle Beispiele

Aufgabe 3

Falls Anja die Wahrheit sagt, dann sagt Beate die Wahrheit und Christel lügt. Die Negation von Christels Aussage ist „Anja und Beate sagen nicht beide die Wahrheit und lügen nicht beide." Also muss entweder Anja oder Beate lügen, was im Widerspruch zur Annahme steht.
Falls Anja lügt, dann lügt Beate und Christel sagt die Wahrheit. Christels Aussage ist wahr, weil Anja und Beate beide lügen.
Ergebnis: Anja und Beate lügen, Christel sagt die Wahrheit.

Aufgabe 4

Erst bilden wir die Negationen zu den drei Aussagen:

- Martin ist Informatiker oder Bauingenieur.
- Martin ist Sozialpädagoge oder Peter ist Bauingenieur.
- Lothar ist kein Sozialpädagoge.

Aus der ersten Aussage folgt, dass Martin weder Architekt noch Sozialpädagoge ist. Mit der zweiten Aussage folgt, dass Peter Bauingenieur sein muss. Martin ist dann Informatiker. Da Lothar nicht Sozialpädagoge ist, muss Klaus Sozialpädagoge sein und Lothar ist der Architekt.
Ergebnis: Klaus ist Sozialpädagoge, Martin ist Informatiker, Lothar ist Architekt, Peter ist Bauingenieur.

Aussagen

Mathematische Aussagen sind immer entweder ______________ oder ______________.
Eine **Aussage** ist somit ein sprachliches Gebilde, dem genau ein ______________________
____.

Beispiele:
p : „9 ist eine Primzahl" ____
q : „Jede Primzahl ist ungerade" ____
r : „2 ist eine Primzahl" ____
s : „Wie ist das Wetter heute" ____
____

Von jeder Aussage p kann seine Negation „nicht p" (geschrieben: $\neg p$) gebildet werden. $\neg p$ ist genau dann falsch, wenn p wahr ist und umgekehrt. Somit lässt sich die Negation durch eine sogenannte Wahrheitstafel definieren.

p	$\neg p$

Aussagen werden mit Aussagenvariablen $p, q, r, \ldots$ bezeichnet. Betrachtet man nur den Wahrheitswert (nicht den Inhalt) von Aussagen, dann gibt es genau 2 verschiedene Aussagen (wahre Aussage oder falsche Aussage), genau 4 verschiedene Paare (p, q) von Aussagen, genau 8 verschiedene Tripel (p, q, r) von Aussagen, …, genau 2^n verschiedene n-Tupel von Aussagen.

Die wichtigsten Verknüpfungen zweier Aussagen sind:

Konjunktion: ____
Adjunktion: ____
Implikation: ____
Äquivalenz: ____

Die zugehörige Wahrheitstafel ist:

p	q				

Aussagen – Lösung

Mathematische Aussagen sind immer entweder wahr (w) oder *falsch (f)*. Eine **Aussage** ist somit ein sprachliches Gebilde, dem genau ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

<u>Beispiele:</u>

A: „9 ist eine Primzahl“ ist eine falsche Aussage.

B: „Jede Primzahl ist ungerade“ ist eine falsche Aussage.

C: „2 ist eine Primzahl“ ist eine wahre Aussage.

D: „Wie ist das Wetter heute“ ist keine Aussage, weil sein Wahrheitsgehalt weder wahr noch falsch ist.

Von jeder Aussage p kann seine Negation „nicht p“ (geschrieben: $\neg p$) gebildet werden. $\neg p$ ist genau dann falsch, wenn p wahr ist und umgekehrt. Somit lässt sich die Negation durch eine sogenannte Wahrheitstafel definieren.

p	$\neg p$
w	*f*
f	*w*

Aussagen werden mit Aussagenvariablen $p, q, r, \ldots$ bezeichnet. Betrachtet man nur den Wahrheitswert (nicht den Inhalt) von Aussagen, dann gibt es genau 2 verschiedene Aussagen (wahre Aussage oder falsche Aussage), genau 4 verschiedene Paare (p, q) von Aussagen, genau 8 verschiedene Tripel (p, q, r) von Aussagen, …, genau 2^n verschiedene n-Tupel von Aussagen.

Die wichtigsten Verknüpfungen zweier Aussagen sind:

Konjunktion: $p \wedge q$ „p und q“

Adjunktion: $p \vee q$ „p oder q“

Implikation: $p \Rightarrow q$ „wenn p, dann q“ (oder „aus p folgt q“)

Äquivalenz: $p \Leftrightarrow q$ „p genau dann, wenn q“

Die zugehörige Wahrheitstafel ist:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*w*	*f*	*f*
f	*w*	*f*	*w*	*w*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*w*	*w*

Lehrerhinweis zur Implikation: Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern.
Beispiel: „Wenn der VfB Stuttgart gegen Bayern München gewinnt, fresse ich einen Besen.“

$3 \cdot 3 = 9$

$5 + 2 < 6$

$b \cdot 0 = 0$

$4 \cdot a = 1$

Alle hier anwesenden Personen sind SchülerInnen dieser Schule

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right) \epsilon \mathbb{N}^*$$

x ist ein beliebtes Kinderlied

Nehmen Sie Stellung!

Einstiegsfolie -Lehrperson

$3 \cdot 3 = 9$

AUSSAGE
richtig

5 + 2 < 6

AUSSAGE
falsch

$b \cdot 0 = 0$

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig für alle reellen b

$4 \cdot a = 1$

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig für a = 0,25

Alle hier anwesenden Personen sind SchülerInnen der FLS

AUSSAGE falsch, da Lehrer anwesend

x ist ein beliebtes Kinderlied

AUSSAGEFORM
AUSSAGE richtig z.B. für „Lalelu…“.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right) \epsilon \mathbb{N}^*$$

AUSSAGE
richtig

Tafelbild: Definitionen von Aussage und Aussageform

Def.:
Eine **Aussage** ist eine Formulierung, der man einen der beiden Wahrheitswerte „wahr“ bzw. „falsch“ zuordnen kann.

Bsp.:
„2+3 = 5“ und „Tim ist ein Junge“ sind wahre Aussagen.
„9:4 = 2“ und „Rom liegt in der BRD“ sind falsche Aussagen.

Def.:
Eine **Aussageform** ist eine Formulierung mit einer Variablen und wird zu einer Aussage, wenn man für die Variable ein Element der Grundmenge einsetzt.
Man schreibt A(x).

Bsp.:
„5 a = 1“ ist eine Aussageform und wird mit a = 1/5 und a Element von G zu einer wahren Aussage, „3 b =0“ ist eine Aussageform und ist eine wahre Aussage für alle Elemente aus G.

Def.:
Falls L = G, so nennt man die Aussageform bzgl. G **allgemeingültig**.
Falls $L \neq \emptyset$, so bezeichnet man die Aussageform bzgl. G **erfüllbar**.
Falls $L = \emptyset$, so heißt die Aussageform bzgl. G **nicht erfüllbar**.

Bsp. $3 + 0 \cdot x < 4$ allgemeingültig für G = $\mathbb{Q}$.
$x^2 - 3 = 0$ ist für $\mathbb{Q}$ nicht erfüllbar, wohl aber für $\mathbb{R}$.

Arbeitsauftrag: Bearbeiten Sie folgende Übungsaufgaben.

Sozialform: Partnerarbeit

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob eine Aussageform bzw. eine Aussage vorliegt. Bestimmen Sie im letzteren Fall den Wahrheitswert.

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{8} < 1$

b) $2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \epsilon \mathbb{N}$

c) $5x^2 - 5x = 0,\ G = \mathbb{N}$ hat mindestens eine Lösung.

d) $x^2 - x = 2$ hat die Lösung 0,5.

Aufgabe 2

Äußern Sie sich zu „Die Aussage $x^2 = 3$ ist falsch".

Aufgabe 3

Entscheiden Sie über Allgemeingültig-, Erfüllbar- bzw. Nichterfüllbarkeit.

a) $0 \cdot x = 0$ bzgl. $\mathbb{R}$

b) $-x < 0$ bzgl. $\mathbb{R}_+^*$

c) $2x^2 < 2x$ bzgl. $\mathbb{Q}$

d) $\frac{x+2}{x} > 1$ bzgl. $\mathbb{Q}$

e) $2x = 5\ bzgl.\ \mathbb{Z}$

Lösung

Arbeitsauftrag: Bearbeiten Sie folgende Übungsaufgaben.
Sozialform: Partnerarbeit

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob eine Aussageform bzw. eine Aussage vorliegt. Bestimmen Sie im letzteren Fall den Wahrheitswert.

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{8} < 1$ Aussage , falsch

b) $2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \epsilon \mathbb{N}$ Aussage, richtig

c) $5x^2 - 5x = 0,\ G = \mathbb{N}$, hat mindestens eine Lösung. Aussage richtig, $L = \{0,1\}$

d) $x^2 - x = 2$ hat die Lösung 0,5. Aussage falsch

Aufgabe 2

Äußern Sie sich zu „Die Aussage x²=3 ist falsch".

1. Aussageform statt Aussage,
2. Es fehlt der Definitionsbereich, z.B. auf $\mathbb{Q}$ falsche Aussage für alle Elemente, auf $\mathbb{R}$ richtige Aussage für $x = \sqrt{3}$

Aufgabe 3

Entscheiden Sie über Allgemeingültig-, Erfüllbar- bzw. Nichterfüllbarkeit.

a) $0 \cdot x = 0\ bzgl.\ \mathbb{R}$ L=$\mathbb{R}$ → allgemeingültig

b) $-x < 0\ bzgl.\ \mathbb{R}_+^*$ L= $\mathbb{R}$ →allgemeingültig

c) $2x^2 < 2x\ bzgl.\ \mathbb{Q}$ L≠ ∅ →erfüllbar

d) $\frac{x+2}{x} > 1\ bzgl.\ \mathbb{Q}$ L≠ ∅ →erfüllbar

e) $2x = 5\ bzgl.\ \mathbb{Z}$ L= ∅ →nicht erfüllbar

Folie:

Arbeitsauftrag:

Erarbeiten Sie sich weitere Themengebiete der Aussagenlogik selbstständig im Rahmen einer Arbeitstheke.

Es gibt fünf voneinander unabhängige Themen mit folgendem Aufbau:
- Infobox
- Definition
- Standardaufgaben

Eigenkontrolle durch Kontrollstation.

Bearbeitungszeit: 2 Unterrichtsstunden

Zielsetzung des Unterrichtsarrangements:

- Individuelle Auseinandersetzung mit den Lerninhalten
- Selbstständige Zeiteinteilung und damit Lernen im eigenen Tempo innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens
- Bearbeitungsreihenfolge der Lerninhalte nach persönlicher Präferenz
- Individuelle Hilfe durch die Lehrperson während andere Schülerinnen und Schüler weiterarbeiten können

→Training von selbstständigem und selbst-verantwortlichem Lernen („Uni-Lernen“)

Konjunktion

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Konjunktion" selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende
Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen an einem Tag scheint die Sonne und gleichzeitig regnet es.

Dann wäre die Aussage „Die Sonne scheint" und auch die Aussage „Es regnet" richtig.

Wenn nun also die beiden Teilaussagen wahr sind, so muss es auch die zusammengesetzte Aussage „Die Sonne scheint und es regnet." sein. Eine solche Aussagenverknüpfung heißt Konjunktion. Man verwendet das Symbol $\wedge$ *, das für „und" steht.*

Definition:
Wenn p und q Aussagen sind, dann ist es auch die Konjunktion $p \wedge q$ eine Aussage. Ferner ist $p \wedge q$ genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q den Wahrheitswert wahr annehmen. Ebenso können Aussageformen P(x) und Q(x) verknüpft werden, sofern sie die gleiche Grundmenge haben.

Bsp. $\underbrace{(2 \cdot 4 = 8)}_{\text{Aussage p}} \wedge \underbrace{(5 - 3 = 1)}_{\text{Aussage q}}$ ist eine falsche Aussage, weil die zweite Teilaussage falsch ist.

$3 < x \wedge x < 5 \; bzgl. \; \mathbb{R}$ ist eine Verknüpfung von zwei Aussageformen, die durch sinniges Einsetzen zu Aussagen werden.

Fazit:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Konjunktion wahr.

Ist die Konjunktion wahr so sind es auch p und q.

Ist die Konjunktion falsch so sind p und q falsch oder p falsch und q richtig oder p richtig und q falsch.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: |-1| > 1
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: 9 ist eine Primzahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \wedge B, A \wedge C, B \wedge D, C \wedge D, D \wedge E, C \wedge E$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(4 < x) \wedge (x = 14)$
$(x^2 = x) \wedge (x > 0)\ bzgl.\ \mathbb{Q}$

Konjunktion LÖSUNG

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: |-1| > 1
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: 9 ist eine Primzahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$\boldsymbol{A \wedge B}$:

A	B	$\boldsymbol{A \wedge B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{A \wedge C}$:

A	C	$\boldsymbol{A \wedge C}$
wahr	falsch	falsch

$\boldsymbol{B \wedge D}$:

B	D	$\boldsymbol{B \wedge D}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C \wedge D}$:

C	D	$\boldsymbol{C \wedge D}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{D \wedge E}$:

D	E	$\boldsymbol{D \wedge E}$
wahr	falsch	falsch

$\boldsymbol{C \wedge E}$:

C	E	$\boldsymbol{C \wedge E}$
falsch	falsch	falsch

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(4 > x) \land (x = 14)$ Die Konjunktion ist falsch und daher existiert keine Lösungsmenge.

$(x^2 = x) \land (x > 0)\ bzgl. \mathbb{Q}$ L = {1}

Adjunktion

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Adjunktion“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen eine Schülergruppe fährt auf Exkursion und hat zwei Ziele zur Auswahl: das Deutsche Museum und den Bundestag.
Dann wäre die Aussage „Wir fahren ins Deutsche Museum oder zum Bundestag“ richtig, wenn die Schülergruppe ins Deutsche Museum fährt. Die Aussage wäre aber auch richtig, wenn sie zum Bundestag fährt. Auch wenn sie zu beiden Zielen fährt, ist die Aussage richtig. Fährt die Schülergruppe allerdings zu keinem der Ziele, so ist die Aussage falsch. Man spricht hierbei von einer Adjunktion und verwendet das Symbol ∨, das für „oder“ steht.

Definition:
Wenn p und q Aussagen sind, dann ist es auch die Adjunktion $p \vee q$ eine Aussage. Ferner ist $p \vee q$ genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen p oder q den Wahrheitswert wahr annimmt.
Wenn P(x) und Q(x) Aussageformen sind, dann ist es auch die Adjunktion $P(x) \vee Q(x)$, die dann eine wahre Aussage darstellt, wenn mindestens eine der Aussageformen eine wahre Aussage darstellt.

Bsp. $(15 > 5) \vee (12 < -5)$ ist eine wahre Aussage, weil mindestens eine Teilaussage wahr ist.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x^2 > 2\ bzgl.\ \mathbb{R}$ lautet
$L = \{x \in \mathbb{R} | x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}\}$.

Fazit:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p wahr und q falsch, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p falsch und q wahr, dann ist die Adjunktion wahr.

Ist p als auch q falsch, so ist die Adjunktion falsch.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: Köln ist eine Hauptstadt
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: Alle Menschen haben schwarze Haare.
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \vee B, A \vee E, B \vee D, C \vee D, D \vee E, C \vee E$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen ($G = \mathbb{R}$):

$(x > 4) \vee (x \leq 4)$

$(x > 11) \vee (x < 11)$

$(x = 10) \vee (x > 7)$

Adjunktion **LÖSUNG**

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 5 ist eine ungerade Zahl
B: 6 ist ein Vielfaches von 3
C: Köln ist eine Hauptstadt
D: 20 ist durch 4 teilbar
E: Alle Menschen haben schwarze Haare.
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von
$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$:

A	B	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{E}$:

A	E	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{E}$
wahr	falsch	wahr

$\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{D}$:

B	D	$\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{D}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}$:

C	D	$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}$
falsch	wahr	wahr

$\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{E}$:

D	E	$\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{E}$
wahr	falsch	wahr

$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{E}$:

C	E	$\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{E}$
falsch	falsch	falsch

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Aussageformen:

$(x > 4) \vee (x \leq 4)$	L= $\mathbb{R}$
$(x > 11) \vee (x < 11)$	L= $\mathbb{R} \setminus \{11\}$
$(x = 10) \vee (x > 7)$	L=$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

Implikation

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Implikation“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Angenommen jemand trifft die Aussage „Wenn der Rasensprenger an ist, dann ist der Rasen nass.“ Diese Schlussfolgerung ist richtig, sofern der Rasensprenger richtig angeschlossen ist und auch sonst alle technischen Voraussetzungen erfüllt sind. Man spricht bei dieser Folgerung von einer Implikation und verwendet das Symbol $\Rightarrow$, das für „impliziert, folgt bzw. dann“ steht.

Bei der Implikation muss darauf geachtet werden, dass der Rückschluss nicht gelten muss! Beispielsweise könnte der Rasen auch nass sein, weil es geregnet hat.

Definition:

Wenn p und q Aussagen sind, dann ist die Aussagenverbindung $p \Rightarrow q$ eine falsche Aussage, sofern p wahr und q falsch ist, z.B. p: 2+5=7, q: 2-1=5. Andernfalls nimmt sie den Wahrheitswert wahr an.

Seien A(x) und B(x) Aussageformen, G die Grundmenge und L(A(x)) und L(B(x)) die Lösungsmengen, so ist die Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$ eine Aussage, die den gleichen Wahrheitswert wie die Aussage $L(A(x)) \subseteq L(B(x))$ hat.

Bsp. $\text{p}: 2+5=7,\ \text{q}: 2-1=5,\ p \Rightarrow q$ ist eine falsche Aussage

$\text{p}: 4-1=3,\ \text{q}: 3>1,\ p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

$\text{p}: 2>8,\ \text{q}: 2-1=1,\ p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

$\text{p}: 6+2=-1,\ \text{q}: -1$ ist eine natürliche Zahl, $p \Rightarrow q$ ist eine wahre Aussage

Fazit:

Eine Aussage $p \Rightarrow q$ ist wahr, wenn die Folgerung q wahr ist. So ist der logische Schluss wahr, wenn sowohl p als auch q falsch sind. D.h.:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist der logische Schluss wahr.

Ist p wahr und ist q falsch, dann ist der logische Schluss falsch.

Ist p falsch und ist q wahr, dann ist der logische Schluss wahr.

Ist p falsch und ist q falsch, dann ist der logische Schluss wahr.

Beachte: Eine Implikation ist bereits dann wahr, wenn p falsch ist. Dies wird „ex falso quodlibet“ bezeichnet („Aus Falschem folgt Beliebiges.“).

Aufgabe

a) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert (Der erste Satzteil sei p, der zweite sei q.).
   1) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   2) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle grün.
   3) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   4) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle grün.
   5) Wenn Wasser trocken ist, dann ist heute ein Schultag.

b) Entscheiden Sie.
   1) Jeder Teiler von 6 ist auch Teiler von 12, G= $\mathbb{N}$
   2) $a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$
   3) $b \neq b \Rightarrow b = 4$
   4) A: 6 ist eine ungerade Zahl, B: 2 ist eine Primzahl, $A \Rightarrow B$

Implikation LÖSUNG

Aufgabe

a) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert (Der erste Satzteil sei p, der zweite sei q.).
   1) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   2) Wenn Rom in der BRD liegt, dann ist Steinkohle grün.
   3) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle schwarz.
   4) Wenn Rom in Italien liegt, dann ist Steinkohle grün.
   5) Wenn Wasser trocken ist, dann ist heute ein Schultag.

1)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	wahr	wahr

2)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	falsch	wahr

3)

p	q	$p \Rightarrow q$
wahr	wahr	wahr

4)

p	q	$p \Rightarrow q$
wahr	falsch	falsch

5)

p	q	$p \Rightarrow q$
falsch	vielleicht wahr, vielleicht falsch	wahr

b) Entscheiden Sie.

1) Jeder Teiler von 6 ist auch Teiler von 12, G= $\mathbb{N}$

A(x) stehe für Teiler von 6 und B(x) stehe für Teiler von 12.
Teiler von 6 sind 2, 3 und 6.
Teiler von 12 sind 2, 3, 4 und 6.
Es gilt $L(A(x)) \subseteq L(B(x))$.
Somit wahre Aussage

2) $a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

Wahre Aussage

3) $b \neq b \Rightarrow b = 4$

Wahre Aussage, da $b \neq b$ falsch ist und „ex falso quodlibet“

4) A: 6 ist eine ungerade Zahl, B: 2 ist eine Primzahl, $A \Rightarrow B$

A falsch, B wahr, $A \Rightarrow B$ wahr

Äquivalenz

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Äquivalenz“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Haben Säugetiere ein X- und ein Y-Chromosom, dann sind sie männlich. Die weiblichen Säugetiere hingegen haben zwei X-Chromosomen. Man kann also folgendes formulieren: Wenn ein Säugetier ein X- und ein Y-Chromosom hat, dann ist es männlich. Genauso könnte man sagen: Ein Säugetier ist genau dann männlich, wenn es ein X- und ein Y-Chromosom hat. Die Gleichwertigkeit zwischen zwei Aussagen nennt man Äquivalenz und verwendet das Symbol $\Leftrightarrow$.

Definition:
Zwei Aussagen p und q nennt man genau dann äquivalent ($p \Leftrightarrow q$), wenn sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ gilt, d.h. die Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.
Seien A(x) und B(x) Aussageformen, G die Grundmenge und L(A(x)) und L(B(x)) die Lösungsmengen, so heißen A(x) und B(x) äquivalent, wenn $L\left(A(x)\right) = L(B(x))$.

Bsp. p: x ist eine gerade Zahl, q: x ist durch 2 teilbar.
$p \Leftrightarrow q$ ist eine wahre Aussage, weil die Aussageformen p und q je nach für x eingesetzter Zahl entweder gleichzeitig wahr oder falsch sind.

Fazit:

Ist p wahr und ist q wahr, dann ist die Äquivalenz wahr.

Ist p wahr und q falsch, dann ist die Äquivalenz falsch.

Ist p falsch und q wahr, dann ist die Äquivalenz falsch.

Ist p als auch q falsch, so ist die Äquivalenz wahr.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 2 ist eine Primzahl
C: 9 ist eine Primzahl
D: 8 ist eine ungerade Zahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $A \Leftrightarrow B, C \Leftrightarrow D, D \Leftrightarrow A, C \Leftrightarrow B, A \Leftrightarrow C$.

b) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert.

1) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$
2) $3 = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 8$
3) $|-2| < -1 \Leftrightarrow 5 + 7 = 12$

Äquivalenz LÖSUNG

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 2 ist eine Primzahl
C: 9 ist eine Primzahl
D: 8 ist eine ungerade Zahl
Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$:

A	B	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
wahr	wahr	wahr

$\boldsymbol{C \Leftrightarrow D}$:

C	D	$\boldsymbol{C \Leftrightarrow D}$
falsch	falsch	wahr

$\boldsymbol{D \Leftrightarrow A}$:

D	A	$\boldsymbol{D \Leftrightarrow A}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{C \Leftrightarrow B}$:

C	B	$\boldsymbol{C \vee D}$
falsch	wahr	falsch

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow C}$:

A	C	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow C}$
wahr	falsch	falsch

b) Entscheiden Sie über den Wahrheitswert.

1) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$ wahr
2) $3 = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 8$ wahr
3) $|-2| < -1 \Leftrightarrow 5 + 7 = 12$ falsch

Negation

Arbeitsauftrag: Erarbeiten Sie sich das Thema „Negation“ selbstständig. Arbeiten Sie dazu nachfolgende Infobox durch und versuchen Sie anschließend das neue Wissen auf die anschließende Aufgabe anzuwenden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Kontrollstation.

Infobox

Aussagen können verneint werden. Nimmt man die Aussage „Es regnet!“ und es regnet tatsächlich, dann ist die Aussage wahr. Die Verneinung der Aussage hat dann den Wahrheitswert falsch, also „Es regnet nicht!“, wenn es tatsächlich regnet. Man muss beachten, dass beispielsweise die Aussage „Es scheint die Sonne“, nicht die Verneinung der ursprünglichen Aussage ist, denn es könnte sein, dass es bewölkt ist, es aber nicht regnet.
Man spricht beim Verneinen einer Aussage vom Negieren und verwendet das Symbol ¬.

Definition:
Die Negation $\neg p$ einer Aussage p ist eine Aussage und p und $\neg p$ haben entgegengesetzte Wahrheitswerte.
Ebenso werden Aussageformen negiert. $\neg A(x)$ ist die Aussageform, die bei beliebigem Einsetzen eines Grundmengenelements zu einer falschen Aussage führt, wenn A(x) bei Einsetzung des Grundmengenelements wahr ist.

Bsp. p: Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, q: Es gilt nicht $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
Die Aussage p ist falsch. Die Aussage q ist die Negation von p, also $\neg p$, und ist wahr.

Fazit: Ist p wahr, so muss $\neg p$ falsch sein.
Ist p falsch, so muss $\neg p$ wahr sein.

Beachte: Eine negierte Aussage p ist genau dann wahr, wenn die Aussage p falsch ist.
Statt der Schreibweise $\neg p$ kann auch $\overline{p}$ geschrieben werden.

Aufgabe

a) Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: 4 ist eine Primzahl
C: $5 > 3$
D: Songschreiber verdienen ihr Geld mit dem Schreiben von Songs.
Bestimmen Sie jeweils die Negation.

b) Negieren Sie:

A: Alle Mathe+ - Schülerinnen und Schüler wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
B: Jede Primzahl ist ungerade.

Negation **LÖSUNG**

a) A: 7 ist eine ungerade Zahl — $\neg \boldsymbol{A}$: 7 ist keine ungerade Zahl
wahr — falsch

B: 4 ist eine Primzahl — $\neg \boldsymbol{B}$: 4 ist keine Primzahl
falsch — wahr

C: 5>3 — $\neg \boldsymbol{C}$: 5<3
wahr — falsch

D: Songschreiber verdienen ihr Geld mit dem Schreiben von Songs. — $\neg \boldsymbol{D}$: Songschreiber verdienen kein Geld mit dem Schreiben von Songs.
wahr — falsch

A: Alle Mathe+ - Schülerinnen und Schüler wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

$\neg A$: Es gibt mindestens einen/eine Mathe+ - Schüler/in, der /die nicht weiß, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

B: Jede Primzahl ist ungerade.
$\neg B$: Nicht jede Primzahl ist ungerade.
Vorsicht: Die Negation lautet nicht „Jede Primzahl ist gerade“, denn entweder muss die Aussage oder die negierte Aussage richtig sein.

Allgemeine didaktische Bemerkungen zu LPE 2

Zu Beginn muss bei den Schülerinnen und Schülern zunächst einmal die Notwendigkeit geweckt werden, mathematische Aussagen zu beweisen.
Zum Einstieg sind Alltagsbeispiele geeignet. Anschließend verdeutlichen vermeintlich wahre mathematische Aussagen die Notwendigkeit diese zu hinterfragen und zu beweisen oder zu widerlegen (vgl. Einstieg Arbeitsblatt).

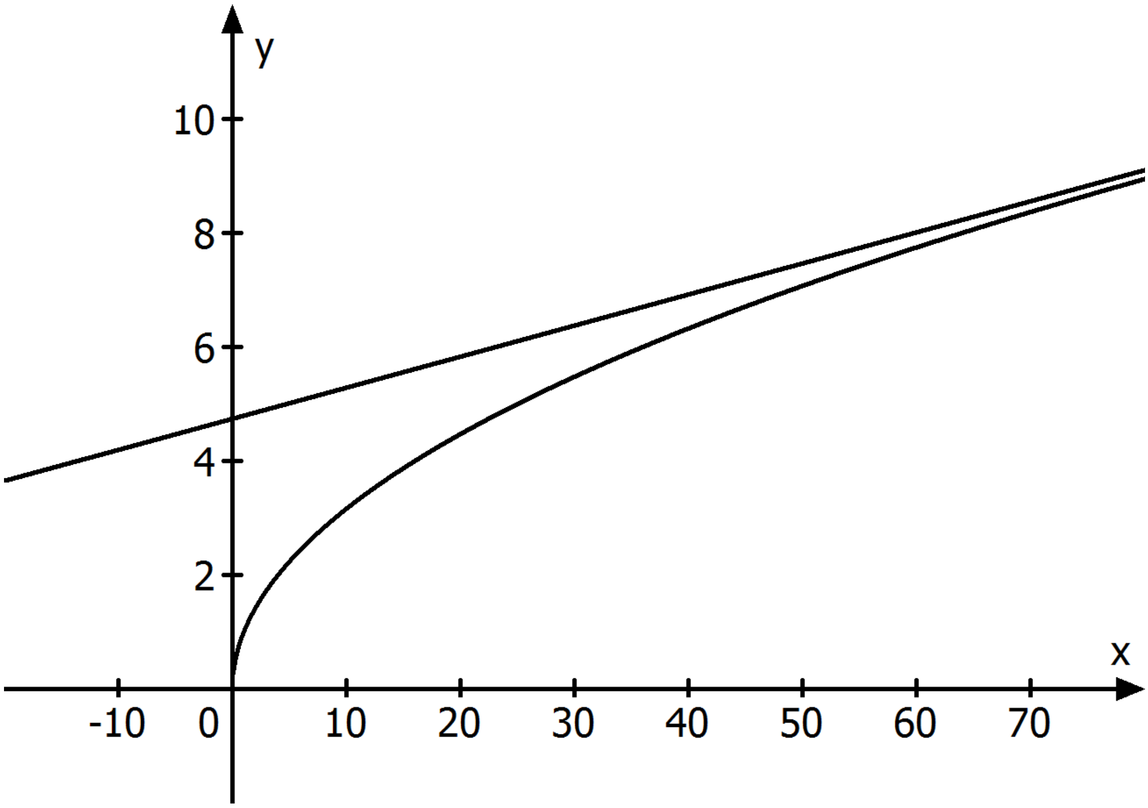
Hinweise zum methodischen Vorgehen

Folgende Herangehensweisen wären denkbar:

1) Die verschiedenen Beweismethoden werden anhand von geeigneten Beispielen erarbeitet. Die Beweismethoden stehen hierbei im Vordergrund (vgl. Materialien zu 2.1 Direkter und 2.2 Indirekter Beweis).
2) Aufgrund einer konkreten Fragestellung ergibt sich die Möglichkeit, die Beweismethoden in einem kontinuierlichen Sachzusammenhang zu erarbeiten. Dabei steht für den Schüler das Thema im Vordergrund und die Beweismethoden werden beiläufig vermittelt. Das Thema kann etwa aus LPE 4 stammen (vgl. Materialien zu 2.3 Primzahlen).

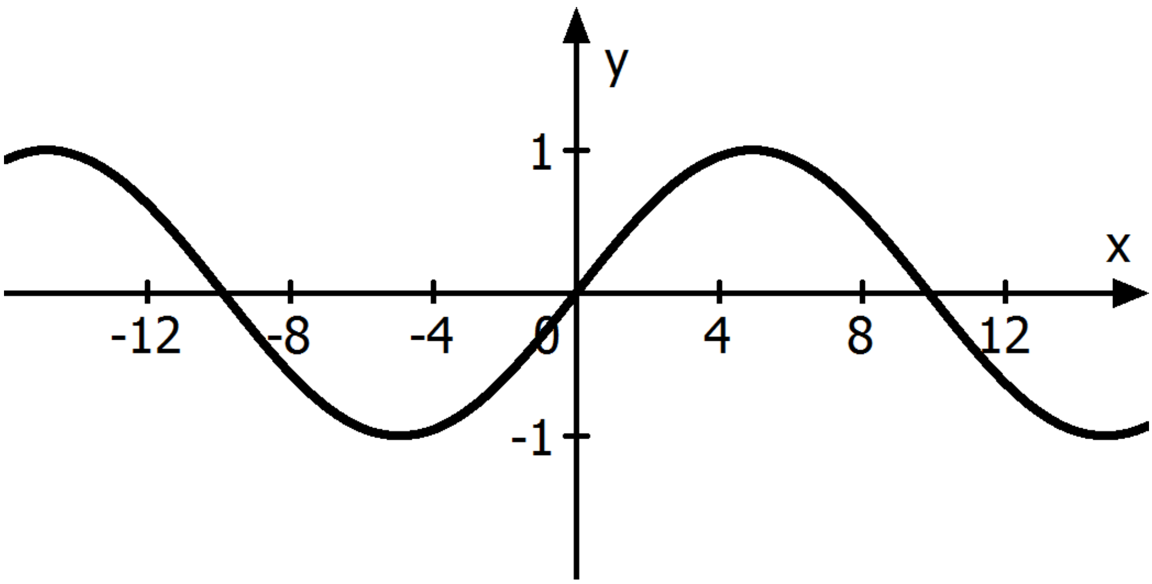
Es bietet sich an, im Laufe des Schuljahres bei anderen Lehrplaneinheiten immer wieder auf die hier eingeführten Beweismethoden zurückzugreifen.

Arbeitsblatt: „mathematische optische Täuschung“



Die Wurzelfunktion hat eine schiefe Asymptote!

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\sin(\frac{x}{\pi})$.



Die Funktion hat bei $x=10$ eine Nullstelle!

Einstieg in LPE 2

Optische Täuschungen zeigen, dass man die eigene Wahrnehmung hinterfragen muss. Von diesen Spielereien ausgehend kann man auf reale Situationen eingehen, die Beweise bedürfen, wie beispielsweise die Frage nach der Schuld oder Unschuld eines Angeklagten. Der Übergang zur Mathematik kann durch folgende Beispiele erfolgen. Für „mathematische optische Täuschungen“ steht ein Arbeitsblatt zur Verfügung.

Beispielliste:

1. „64 = 65“ und ähnliche Legespiele
2. Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element. Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein größtes Element.
3. Fermatzahlen: $F_n = 2^{(2^n)} + 1, n \in \mathbb{N}$. Behauptung: Alle Zahlen F_n sind Primzahlen.
4. Die Diagonalen in jedem Viereck schneiden sich.
5. …

Didaktisch-methodische Hinweise (zu den Beispielen)

Das Legespiel „beweist“ eine offensichtlich falsche Aussage, die die Schüler mit Papier und Schere selbst nachvollziehen können.

Beide Aussagen bei 2. sind ähnlich und vermeintlich richtig, bei genauerer Betrachtung erweist sich die zweite Aussage als falsch. Die erste Aussage lässt sich mit einfachen Argumenten beweisen, für die zweite Aussage reicht ein Gegenbeispiel, um sie zu widerlegen.

Die Fermatzahlen lassen sich bis $n = 5$ mit Hilfe eines Taschenrechners leicht berechnen: 3, 5 und 17 erkennt der Schüler sofort als Primzahl, 257 lässt sich mit etwas Aufwand auch als Primzahl erkennen, 65537 weckt den Wunsch nach einem effizienteren Primzahltest, 4294967297 hat den Teiler 641. Historisch gesehen hatte Euler diese Erkenntnis 95 Jahre nach Fermats falscher Behauptung. Heute kann man mit Hilfe eines geeigneten digitalen Mathematikwerkzeugs die Faktorisierung schnell herstellen.

Aufgrund der bisherigen Beispiele werden die Schüler versuchen, ein Viereck zu finden, das als Gegenbeispiel dient. Z. B.

Beweisprinzipien – Direkter Beweis

Didaktische und methodische Hinweise:
Die Lernenden sollen durch Einsetzten von Zahlen in Terme mit Beträgen Vermutungen über die Beziehungen der Betragsterme aufstellen.
Beispielhaft können folgende Betragsterme und Zahlen herangezogen werden.

a	b	$\|a\|+\|b\|$	$\|a+b\|$	$\|a\|\cdot\|b\|$	$\|a\cdot b\|$	$\|a\|-\|b\|$	$\|a-b\|$
2	3						
7	4						
0	5						
0,5	$\frac{1}{3}$						
-5	0						

Durch Gegenbeispiele lassen sich einige Vermutungen schnell widerlegen.
Das Einsetzten von Zahlen reicht aber nicht, um die Allgemeingültigkeit der verbleibenden Vermutungen zu zeigen. Anhand dieser einfachen, von den Schülerinnen und Schülern aufgestellten Beziehungen, kann man erste direkte Beweise durchführen.

Als zu beweisende Beziehungen können sich zum Beispiel ergeben:

- $|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$
- Dreiecksungleichung

Bei einigen der widerlegten Vermutungen kann man durch Ergänzung weiterer Voraussetzungen neue Beziehungen aufstellen und beweisen. Dabei kann man den Schülerinnen und Schülern in den Beweisen deutlich machen, an welcher Stelle die Voraussetzungen eingehen.

Erforderliche Vorkenntnisse: Definition des Betrages

Ausblick:

- Als Weiterführung könnte man Vermutungen zu den trigonometrischen Funktionen aufstellen und anschließend die Additionstheoreme beweisen.

α	β	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$\sin(\alpha+\beta)$	$\sin(\alpha)+\sin(\beta)$

- Das Arbeiten mit Beträgen, dem Prinzip der Fallunterscheidung und einzelne Beziehungen können in LPE 3 bei den Betragsgleichungen und Betragsungleichungen genutzt und weitergeführt werden.

Der indirekte Beweis

Ein Beispiel:

Der Verdächtige X steht vor Gericht. Der Staatsanwalt liest die Anklageschrift vor:

„...Herr X hat am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY einen Einbruch verübt. .....“

Die Staatsanwaltschaft muss z.B. durch Zeugenaussagen beweisen, dass die Anklage berechtigt ist, damit der Verdächtige verurteilt wird.

Der Verdächtige X behauptet natürlich das Gegenteil, nämlich dass er unschuldig ist:

„Ich habe den Einbruch nicht begangen.“

Auch Herr X wird versuchen, seine Aussage zu beweisen, um freigesprochen zu werden. Dabei hat er Glück. Zu der fraglichen Zeit war er nämlich mit mehreren Freunden zusammen. Er sagt also zu seiner Verteidigung: „Wenn ich den Einbruch begangen hätte, dann hätte ich am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY sein müssen. Da ich aber nachweislich an einem
anderen Ort war, kann ich nicht der Täter sein.“

Dieser leicht verständliche „Alibibeweis“ ist nichts anderes als ein indirekter Beweis.

Beim indirekten Beweis geht man so vor:

1. Man nimmt an, dass das Gegenteil der Behauptung gälte und zieht daraus Folgerungen.
2. Man führt die Argumentation zu einem Widerspruch
3. Da der Beweisgang logisch war und aus etwas Richtigem nicht etwas falsches folgen kann, muss die Annahme falsch und die Behauptung richtig sein

✓ Bringen Sie den berühmten Beweis von Euklid in die richtige Reihenfolge. (Hinweis: kann anschließend aufgeklebt werden.)

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Annahme: Es gibt endlich viele Primzahlen.

Dann gibt es eine größte Primzahl p_m.

Weiterhin können wir dann die endliche Menge aller Primzahlen wie folgt aufschreiben:
$\{2; 3; 5; ...; p_m\}$

Wir bilden nun die Zahl N, indem wir alle Primzahlen multiplizieren und eins addieren. $N = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p_m + 1$ und wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall:

N ist eine Primzahl.

Dann ist $N > p_m$.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_m die größte Primzahl ist.

Also war unsere Annahme in diesem Fall falsch.

Zweiter Fall:

N ist keine Primzahl, daher kann N in Primfaktoren zerlegt werden.

Dann muss N durch eine Primzahl teilbar sein.

Wenn wir N durch 2 teilen, so bleibt der Rest … .
Wenn wir N durch 3 teilen, so bleibt der Rest … .
Wenn wir N durch p_m teilen, so bleibt der Rest … .
Somit ist N durch keine der Primzahlen 2; 3; …; p_m teilbar.

Aber N kann in Primfaktoren zerlegt werden.

Also muss es Primfaktoren größer als p_m geben.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_m die größte Primzahl ist.

Also war unsere Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen.

Tafelanschrieb

<u>Beweisführung</u>

Behauptung

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Beweis

Die Beweisführung erfolgt indirekt nach der Methode des Widerspruchsbeweises (indirekter Beweis), das heißt, es wird gezeigt, dass die Annahme, die Wurzel aus 2 sei eine rationale Zahl, zu einem Widerspruch führt (lateinisch: reductio ad absurdum).

Indirekter Beweis:

Wir nehmen an $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. lässt sich als Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen. Wir nehmen auch an, dass $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt, so dass p und q teilerfremde ganze Zahlen sind, d.h. sie haben keinen gemeinsamen Teiler.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

$\frac{p^2}{q^2} = 2$

$p^2 = 2q^2$.

$2q^2$ ist eine gerade Zahl, also ist auch p^2 gerade. Daraus folgt, dass auch die Zahl p gerade ist.

Die Zahl p lässt sich also darstellen durch:

$p = 2r$, wobei r eine ganze Zahl ist.

Damit erhält man mit obiger Gleichung:

$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$

und hieraus nach Division durch 2

$q^2 = 2r^2$.

Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass q^2 und damit auch q eine gerade Zahl ist.

Da p und q durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, die Wurzel aus 2 sei eine rationale Zahl, falsch ist und daher das Gegenteil gelten muss. Damit ist die Behauptung, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, bewiesen.

1.

Bemerkung:

√2 ist gerade die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats (nach dem Satz von Pythagoras: $1^2 + 1^2$ = Diagonale^2). Die Irrationalität von √2 zeigt, dass das Verhältnis Diagonale/Seitenlänge im Quadrat nicht rational ist, d.h. dass bereits die einfachsten geometrischen Figuren nicht durch "Aneinanderlegen" von Kopien einer "kleinsten Elementarlänge" zu konstruieren sind. Diese Erkenntnis hat vermutlich im fünften vorchristlichen Jahrhundert eine der ersten Grundlagenkrisen der Mathematik ausgelöst.

2.

<u>Arbeitsblatt: Der indirekte Beweis</u>

Ein Beispiel:

Der Verdächtige X steht vor Gericht. Der Staatsanwalt liest die Anklageschrift vor:

„...Herr X hat am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY einen Einbruch verübt. ...“

Die Staatsanwaltschaft muss z.B. durch Zeugenaussagen beweisen, dass die Anklage berechtigt ist, damit der Verdächtige verurteilt wird.

Der Verdächtige X behauptet natürlich das Gegenteil, nämlich dass er unschuldig ist:

„Ich habe den Einbruch nicht begangen.“

Auch Herr X wird versuchen, seine Aussage zu beweisen, um freigesprochen zu werden. Dabei hat er Glück. Zu der fraglichen Zeit war er nämlich mit mehreren Freunden zusammen. Er sagt also zu seiner Verteidigung: „Wenn ich den Einbruch begangen hätte, dann hätte ich am 1.10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Uhrengeschäft XY sein müssen. Da ich aber nachweislich an einem
anderen Ort war, kann ich nicht der Täter sein.“

Dieser leicht verständliche „Alibibeweis“ ist nichts anderes als ein indirekter Beweis.

Beim indirekten Beweis geht man so vor:

1. Man nimmt an, dass das Gegenteil der Behauptung gälte und zieht daraus Folgerungen.
2. Man führt die Argumentation zu einem Widerspruch
3. Da der Beweisgang logisch war und aus etwas Richtigem nicht etwas falsches folgen kann, muss die Annahme falsch und die Behauptung richtig sein.

✓ Bringen Sie den berühmten Beweis von Euklid in die richtige Reihenfolge. (Hinweis: kann anschließend aufgeklebt werden.)

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Annahme: Es gibt endlich viele Primzahlen.

Dann gibt es eine größte Primzahl p_m.

Weiterhin können wir dann die endliche Menge aller Primzahlen wie folgt aufschreiben:
$\{2; 3; 5; \ldots; \ p_m\}$

Wir bilden nun die Zahl N, indem wir alle Primzahlen multiplizieren und eins addieren. $N = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$ und wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall:

N ist eine Primzahl.

Dann ist $N > p_m$.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_m die größte Primzahl ist.

Also war unsere Annahme in diesem Fall falsch.

Zweiter Fall:

N ist keine Primzahl, daher kann N in Primfaktoren zerlegt werden.

Dann muss N durch eine Primzahl teilbar sein.

2.2 Der indirekte Beweis

Didaktische Hinweise:
Die Lernenden erarbeiten sich mit Hilfe des Arbeitsblattes, was man unter einem Widerspruchsbeweis versteht.
Anschließend sollen die Lernenden den berühmten Widerspruchsbeweis von Euklid „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ nachvollziehen.

Methodische Hinweise:
Der Beweis von Euklid wird in viele Teilschritte untergliedert. Diese einzelnen Teilschritte werden den Lernenden unsortiert als Textstreifen zur Verfügung gestellt. Die Lernenden bringen den Beweis in die richtige Reihenfolge. Auch die Tatsache, dass die Wurzel aus zwei irrational ist lässt sich auf diese Art gut beweisen.

Fachliche Hinweise:
Erforderliche Vorkenntnisse: Primzahlen

Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$

Didaktische Vorbemerkungen

Der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist ein Standardbeispiel für das Prinzip des Widerspruchsbeweises (vgl. auch Hinweise zum indirekten Beweis).

Man kann die Schülerinnen und Schüler diesen Beweis auf die Irrationalität von $\sqrt{3}$ übertragen lassen und anschließend die Frage aufwerfen, warum der Beweis nicht auf $\sqrt{4}$ übertragbar ist. Die Übertragung fällt leichter, wenn man im Beweis für $\sqrt{2}$ statt „gerade" von „durch 2 teilbar" spricht (oder dies den Schülern als Hinweis gibt.)

Anschließend wird noch ein sehr ausführlicher alternativer Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{3}$ vorgeführt (vgl. Arbeitsblatt). Man könnte die Schülerinnen und Schüler den Beweistext lesen und sie dann die Unterschiede zum ersten Beweis herausarbeiten lassen. Die Schüler erfahren dabei, dass man Behauptungen auf verschiedene Arten beweisen kann und sie üben sich zudem im Lesen mathematischer Texte.

Unter einer „natürlichen Zahl" ist im Folgenden stets eine von Null verschiedene natürliche Zahl zu verstehen.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.
Beweis (durch Widerspruch).
Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen m und n geben, so dass gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 2n^2 = m^2. \qquad (*)$$

Daraus ergibt sich, dass m^2 eine gerade Zahl ist. Daher muss auch m eine gerade Zahl sein. Also gibt es eine natürliche Zahl k, so dass gilt: $m = 2k$. Damit hat man $m^2 = 4k^2$. Setzt man dies in Gleichung $(*)$ ein, so erhält man

$$2n^2 = 4k^2 \quad \text{oder} \quad n^2 = 2k^2.$$

Damit erweist sich n^2 als gerade Zahl. Folglich ist auch n gerade. Da sich somit sowohl m als auch n als gerade Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Satz: $\sqrt{3}$ ist irrational.

Beweis (analog zum Beweis von $\sqrt{2}$)

Wir nehmen an, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen m und n geben, so dass gilt:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 3n^2 = m^2. \qquad (*)$$

Daraus ergibt sich, dass m^2 durch 3 teilbar ist. Daher muss auch m durch 3 teilbar sein. Also gibt es eine natürliche Zahl k, so dass gilt: $m = 3k$. Damit hat man $m^2 = 9k^2$. Setzt man dies in Gleichung $(*)$ ein, so erhält man

$$3n^2 = 9k^2 \quad \text{oder} \quad n^2 = 3k^2.$$

Damit erweist sich n^2 als durch 3 teilbare Zahl. Folglich ist auch n durch 3 teilbar. Da sich somit sowohl m als auch n als durch 3 teilbare Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n. Also ist $\sqrt{3}$ irrational.

Arbeitsblatt (alternativer Beweis durch Widerspruch).

Satz: $\sqrt{3}$ ist irrational.
Beweis. Wir nehmen an, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen m und n geben, so dass gilt:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 3n^2 = m^2. \qquad (*)$$

Wenn n gerade ist, ist es auch n^2 und $3n^2$ ebenso. Also muss in diesem Fall wegen $(*)$ auch m^2 und damit m gerade sein. Da dies aber der Teilerfremdheit von m und n widersprechen würde, müssen folglich die Zahlen m und n beide ungerade sein. Daher gibt es natürliche Zahlen k und h, so dass gilt:

$$m = 2k - 1 \quad \text{und} \quad n = 2h - 1.$$

Setzt man dies in $(*)$ ein, so folgt:

$$3(2k-1)^2 = (2h-1)^2$$

Daraus ergibt sich:

$$3(4k^2 - 4k + 1) = 4h^2 + 4h + 1$$

Und

$$12k^2 - 12k + 3 = 4h^2 + 4h + 1.$$

Subtraktion von 3 und anschließende Division durch zwei ergeben:

$$6k^2 - 6k = 2h^2 + 2h - 1.$$

Isoliert man die 1 auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man:

$$-6k^2 + 6k + 2h^2 + 2h = 1.$$

Klammert man links eine 2 aus, so folgt

$$2(-3k^2 + 3k + h^2 + h) = 1.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht 0 oder eine durch 2 teilbare Zahl, auf der rechten Seite steht 1, das ist ein Widerspruch, womit die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bewiesen ist.

1. Didaktische Vorbemerkungen

Die Schülerinnen und Schüler haben in der Regel bereits eine Vorstellung vom Primzahlbegriff. Daher kann man die Begriffe Primzahl und Teiler von den Schülerinnen und Schülern formulieren und präzisieren lassen.

Es stellt sich schnell heraus, dass es schwierig ist, Primzahlen als solche zu erkennen. Vom Sieb des Eratosthenes ausgehend, erleben die Schülerinnen und Schüler über mehrere Stunden hinweg, wie die Methoden, Primzahlen zu erkennen, immer weiter verfeinert werden. Folgt man der vorgelegten Reihenfolge, so kommt man schließlich zu der Aussage, dass eine natürliche Zahl n eine Primzahl ist, wenn keine der Primzahlen im Intervall $2 \leq x \leq \sqrt{n}$ ein Teiler von n ist.

Die nachfolgend dargestellten Beweise sind oft sehr einfach. Es geht natürlich dabei vor allem darum, die Bemerkungen und Sätze möglichst von Schülerinnen und Schülern formulieren und selbst beweisen zu lassen. Da der mathematische Inhalt einfach ist, kann man dabei sein Augenmerk auf die Argumentation und die korrekte mathematische Fachsprache richten.

Einige der anspruchsvolleren Beweise kann man den Schülerinnen und Schülern austeilen und durcharbeiten lassen, damit sie nicht nur selbst mathematische Texte schreiben lernen, sondern auch Erfahrung darin sammeln, selbstständig vorgegebene Texte für sich zu erschließen.

Man kann auch eine Aussage und deren Beweisidee zunächst etwas wage mitteilen und dann die Schülerinnen und Schüler sowohl Aussage als auch Beweis präzisieren lassen. Gut bietet sich hierfür etwa Bemerkung 4 an, besonders, wenn man nicht angibt, unter welchen Voraussetzungen die Bemerkung gilt.

Es folgt am Ende noch der Standardbeweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, sowie die Weiterentwicklung der Beweisidee, die zeigt, dass es beliebig viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die alle keine Primzahlen sind (Primzahllücken).

Um den Text nicht unnötig zu beschweren, ist unter einer „natürlichen Zahl“ im Folgenden stets eine von Null verschiedene natürliche Zahl zu verstehen.

2. Begriffe

Definition 1 (Teiler) Es seien m und n zwei natürliche Zahlen. Ist der Quotient $m{:}n$ eine natürliche Zahl, so sagt man, dass m durch n ***teilbar*** sei. Die Zahl n heißt in diesem Fall ***Teiler*** von m.

Definition 2 (Primzahl) Eine von 1 verschiedene natürliche Zahl, die nur die 1 und sich selbst als Teiler besitzt, heißt ***Primzahl***.

Alternative Definition Eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler besitzt, heißt ***Primzahl***.

3. Wie erkennt man (kleine) Primzahlen?

Zum Einstieg: Methode des „Sieb des Eratosthenes" mit der Erstellung einer Primzahlliste bis 200. (vgl. auch elektronische Version des Siebs bei Wikipedia)

Bemerkung 1: Ist m ein Teiler von n, so ist auch der Quotient $\frac{n}{m}$ ein Teiler von n.

Beweis Sei $k = \frac{n}{m}$. Multipliziert man diese Gleichung mit m und dividiert man sie mit k, so bekommt man $m = \frac{n}{k}$. Da m nach Voraussetzung eine natürliche Zahl ist, erweist sich damit k gemäß Definition 1 ebenfalls als Teiler von n.

Bemerkung 2: Ist n eine natürliche Zahl, so ist (von n selbst abgesehen) kein Teiler von n größer als $n/2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis) Sei m ein Teiler von n mit $m > \frac{n}{2}$ und $m \neq n$. Dann folgt aus der Bedingung $m > \frac{n}{2}$ nach Multiplikation mit 2 die Ungleichung $2m > n$. Division durch m führt zu $2 > \frac{n}{m}$. Weil nach Voraussetzung m ein Teiler von n ist, muss der Quotient $\frac{n}{m}$ eine natürliche Zahl sein. Da aber die 1 die einzige natürliche Zahl ist, die kleiner als 2 ist, muss demnach, im Widerspruch zu unserer Annahme $m = n$ sein.

Bemerkung 3: Ist m ein Teiler von n und k ein Teiler von m, so ist auch k ein Teiler von n.

Beweis Da k ein Teiler von m ist, ist die Zahl q mit $q = \frac{m}{k}$ eine natürliche Zahl und es gilt $qk = m$. Weil m ein Teiler von n ist, ist die Zahl $p = \frac{n}{m}$ ebenfalls eine natürliche Zahl. Damit haben wir insgesamt:

$$p = \frac{n}{m} = \frac{n}{qk}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit q, so erhalten wir

$$pq = \frac{n}{k}.$$

Da pq als Produkt zweier natürlicher Zahlen selbst eine natürliche Zahl ist, erweist sich somit k gemäß Definition 1 als Teiler von n.

Satz 1: Ist die natürliche Zahl n keine Primzahl, so besitzt sie einen von 1 verschiedenen Teiler, der nicht größer als $\sqrt{n}$ ist.

Beweis (Widerspruchsbeweis) Sei m mit $m > 1$ ein Teiler von n, der von n verschieden ist. Dann ist nach Bemerkung 1 die Zahl k mit $k = \frac{n}{m}$ ebenfalls ein Teiler von n. Da m verschieden von n ist, muss $k > 1$ sein.

Wir behaupten, dass sowohl k als auch m größer als $\sqrt{n}$ sind.

Ist $m > \sqrt{n}$ und $k > \sqrt{n}$, so muss $m \cdot k > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ sein, was im Widerspruch zur Definition der Zahl k steht.

Anmerkung: Wir haben im Beweis eine Rechenregel über Ungleichungen verwendet: Gelten für positive Zahlen a, b, c und d die Beziehungen $a > b$ und $c > d$, so kann man daraus auf die Ungleichung $ac > bd$ schließen. (Bezug zur LPE 3)

Will man also beispielsweise wissen, ob die Zahl 22307 eine Primzahl ist, so genügt es wegen $\sqrt{22307} \approx 149{,}35$ alle natürlichen Zahlen zwischen 2 und 149 zu überprüfen. Ist keine davon ein Teiler von 22307, so muss 22307 wegen Satz 1 eine Primzahl sein.

Wie die folgende Überlegung zeigt, kann man sich die Arbeit noch ein wenig erleichtern:

Satz 2: Der kleinste von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl n ist eine Primzahl.

Beweis (Widerspruchsbeweis) Ist n eine Primzahl, so ist sie selbst der kleinste von 1 verschiedene Teiler, der eine Primzahl ist. Daher können wir für den Rest des Beweises annehmen, dass n keine Primzahl ist.

Ist n keine Primzahl, so besitzt sie Teiler, die von 1 verschiedenen sind. Sind das alles Primzahlen, so ist eine davon die kleinste und die Behauptung ist bewiesen.

Nehmen wir an, n besitzt von 1 verschiedene Teiler, und der kleinste davon ist p und p ist keine Primzahl. Dann besitzt p einen von 1 verschiedenen Teiler q , der nach Bemerkung 2 nicht größer als $\frac{p}{2}$ ist, der also folglich kleiner als p ist. Nach Bemerkung 3 ist q aber auch ein Teiler von n, was im Widerspruch zur Definition von p steht.

Um auszuschließen, dass eine Zahl n eine Primzahl ist, muss man also „nur" testen, ob die Primzahlen x im Intervall $2 \leq x \leq \sqrt{n}$ Teiler von n sind. Im Fall der Zahl 22307 muss man also nicht alle natürlichen Zahlen zwischen 2 und 149 testen, sondern nur die 35 Primzahlen, die in diesem Intervall liegen.

4. Primzahlformeln

Es wäre schön, eine Formel zu haben, mit deren Hilfe man Primzahlen berechnen kann. Genauer: eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit ihrem Funktionswert $f(n)$ eine Primzahl annimmt. Eine solche Funktion hat man bis heute jedoch nicht gefunden (und man kann vermuten, dass es eine derartige Funktion nicht gibt).

Es gibt jedoch quadratische Ausdrücke, die erstaunliche Ergebnisse liefern. Man kann sie wohl als mathematische Kuriositäten ansehen.

So ist für $n = 1, 2, \dots, 40$ bei f mit $f(x) = x^2 - x + 41$ der Funktionswert eine Primzahl, bei g mit $g(x) = x^2 - 79x + 1601$ ist es sogar für $n = 1,2, \dots ,79$ der Fall.

Diese Funktionen liefern die Primzahlfolge zwar nicht in der „natürlichen“ Reihenfolge, aber sie erzeugen ihrer einfachen Bauweise zum Trotz doch recht erstaunlich viele Primzahlen.

Bemerkung 4: Eine quadratische Funktion f der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{N}$ mit $a \in \mathbb{Z}^*,\ b, c \in \mathbb{Z}$ und $|c| \neq 1$ kann nicht ausschließlich Primzahlen als Funktionswerte haben.

Beweis Wir nehmen an, dass $f(n) \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Anderenfalls kann die Behauptung 4 gar nicht erfüllt sein. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$:

$$f(mc) = a(mc)^2 + bmc + c = c(acm^2 + bm + 1).$$

Da a, b, c ganze Zahlen sind und $m \in \mathbb{N}$ gilt, ist d mit $d = acm^2 + bm + 1$ eine ganze Zahl. Da d ein quadratischer Ausdruck in m ist, kann er für $m \in \mathbb{N}$ höchstens zweimal den Wert 1 oder 0 annehmen. Man kann m also so wählen, dass d von 1 oder 0 verschieden ist. Da cd dann eine von 0 oder 1 verschiedene natürliche Zahl ist, ist in diesem Fall $f(mc)$ keine Primzahl, da $|c|$ und $|d|$ Teiler von $f(mc)$ sind.

5. Es gibt unendlich viele Primzahlen

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (Widerspruchsbeweis) Wir nehmen an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, etwa n Stück. Dann muss es eine größte Primzahl geben. Sei p_n diese Zahl. Jede natürliche Zahl m mit $m > p$ ist dann keine Primzahl.

Alle Primzahlen lassen sich somit aufzählen: $p_1,\ p_2, \dots ,p_n$.

Wir bilden das Produkt q aller Primzahlen: $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$.

Die Zahl q ist größer als p_n und somit ist $q+1$ erst recht größer als p_n. Da p_n die größte aller Primzahlen ist, kann $q+1$ keine Primzahl sein. Nach Satz 2 besitzt $q+1$ einen Teiler, der eine Primzahl ist, sagen wir p_i. Dann gilt also

$$\frac{q+1}{p_i} \in \mathbb{N}.$$

Andererseits haben wir:

$$\frac{q+1}{p_i} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1}{p_i} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{p_i} + \frac{1}{p_i}.$$

Da in der Aufzählung $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ***alle*** Primzahlen enthalten sind, ist auch p_i darin enthalten und der Bruch

$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{p_i}$$

kann somit durch p_i gekürzt werden. Daher ist der Bruch eine natürliche Zahl. Da $\frac{1}{p_i}$ keine natürliche Zahl ist, kann $\frac{q+1}{p_i}$ als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem Stammbruch keine natürliche Zahl sein, was einen Widerspruch darstellt.

6. Primzahllücken

Man kann die Argumentation von Satz 3 gewissermaßen umkehren. Es seien $2, 3, 5, \ldots, p$ die ersten n Primzahlen. Dann ist jede natürliche Zahl m mit $m < p$ durch eine dieser Primzahlen teilbar: Entweder ist m selbst eine dieser Primzahlen oder m besitzt einen Teiler, der eine Primzahl ist und der damit zu den Zahlen $2, 3, 5, \ldots, p$ gehört. Es sei q das Produkt der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$. Dann sind die (aufeinander folgenden) natürlichen Zahlen

$$q+2, q+3, q+4, \ldots, q+p$$

alle keine Primzahlen, denn q ist durch jede der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$ teilbar und die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, … , p sind, wie wir uns oben überlegt haben, zumindest durch eine der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$ teilbar.

Beispiel: Wir nehmen $p = 11$. Dann ist $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Und somit sind die zehn aufeinanderfolgenden Zahlen

$$2310+2, 2310+3, \ldots, 2310+11$$

alle keine Primzahlen. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es entsprechend unserer Konstruktion auch Primzahllücken von beliebiger Länge.

Einführen in das mathematische Arbeiten

Vorüberlegung

Die Arbeitsaufträge für die erste und zweite Phase sind der PPT Kubische Lösungsformel zu entnehmen.

Die Seite „Übersicht der einzelnen Beispiele“ sollte auf mindestens DIN A3 Größe ausgedruckt aufgehängt werden.

Geogebra erlaubt eine Vereinfachung und zielgerichtete Verfolgung der einzelnen Schritte, ist aber für einen Mathe + nicht zwingend erforderlich.

Der Ausblick dient einer weiterführenden Fragestellung und ist nur als Hintergrundinformation gedacht. Der geneigte Leser kann sich für ein tieferes Verständnis in angegebener Quelle informieren.

Die Schlussreflektion verlangt einen Rückblick und damit eine Sicht auf die einzelnen Schritte aus einer neuen Warte. Erst damit werden die Struktur und damit der Gedankengang klar. Wissenschaftliches und damit auch mathematisches Arbeiten erfordert immer eine Betrachtung aus einer Metaebene.

3. Phase Arbeitsblatt

Satz: Wenn gilt ……………. ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

eine Lösung der Gleichung $x^3+px+q=0$,

Die Lösungsformel kann nicht für beliebige p und q verwendet werden. Lesen Sie aus der Lösungsformel die Bedingungen an p und q ab, die erfüllt sein müssen, damit die Formel angewendet werden kann.

Überprüfen Sie für Ihre Gleichung, ob:

1. $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$
2. $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$
3. $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$

ist und tragen Sie Ihr Ergebnis auf dem Plakat ein. Formulieren Sie einen möglichen Zusammenhang zwischen $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ und der Anzahl der Nullstellen.

Arbeitsblatt: Reflektion

Warum wird die Lösungsformel für Kubische Gleichungen der Form $x^3+px+q=0$ in der Schule nicht unterrichtet?

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

Reflektion: Notieren Sie in Stichworten die einzelnen Schritte dieses Forschungsgangs und deren Begründung.

Lösung einer Kubischen Gleichung: $x^3+ax^2+bx+c=0$

$3x^3+6x^2-3x+9=0$

$x^3+2x^2-1x+3=0$

x^3+ax^2+bx+c

x^3+px+q

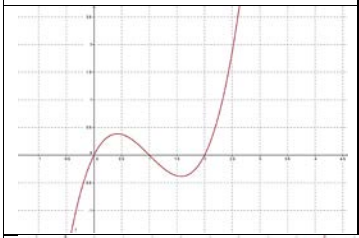
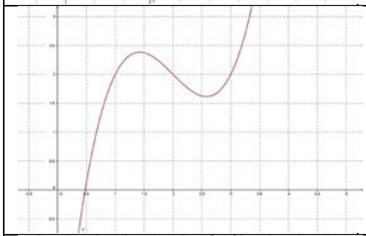
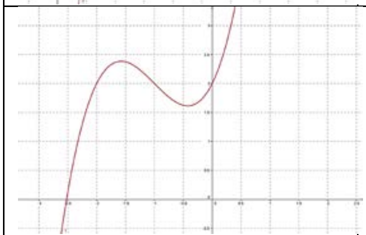
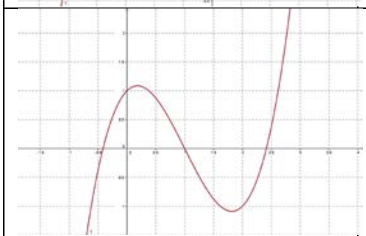
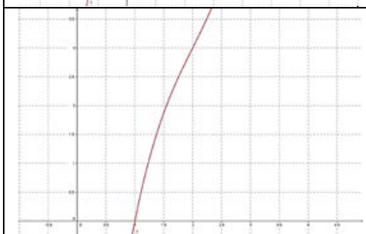
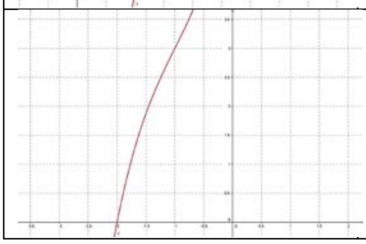
$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

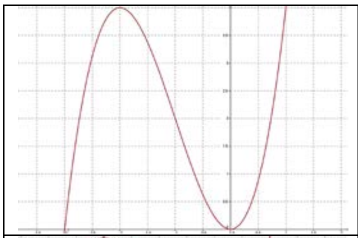
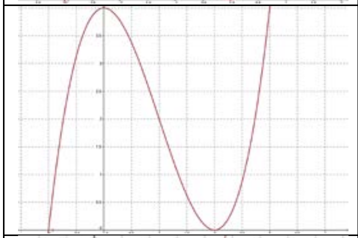
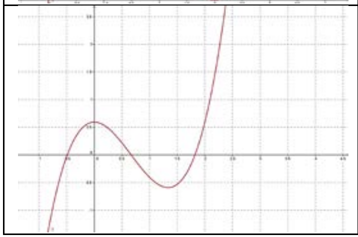
$$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$$

„Funktionskarten“

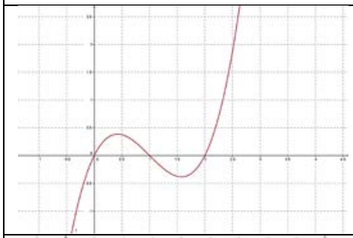
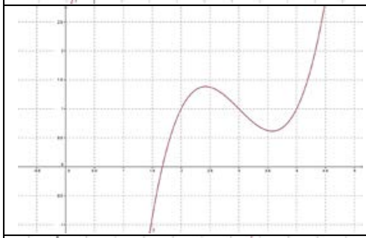
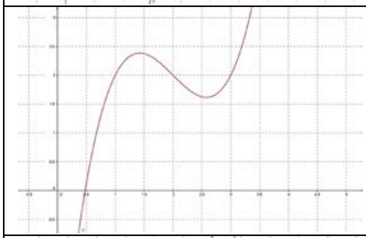
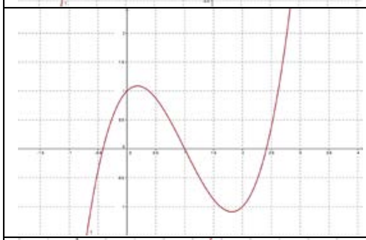
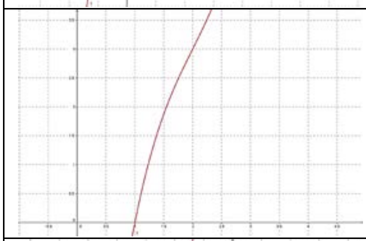
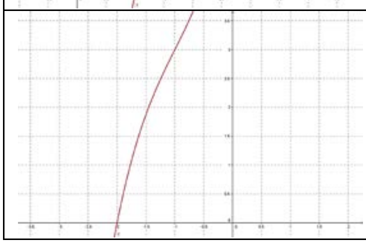
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	$g(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 23$
$h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$	$i(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
$j(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$	$k(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 9$
$l(x) = x^3 + 3 * x^2 + 5x + 6$	$m(x) = x^3 + 3x^2$
$n(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$o(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{16}{27}$

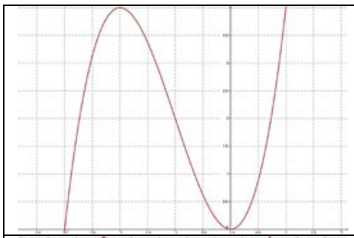
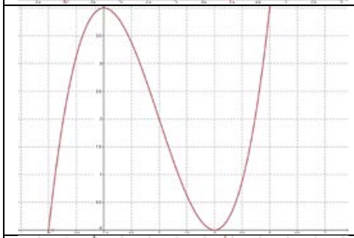
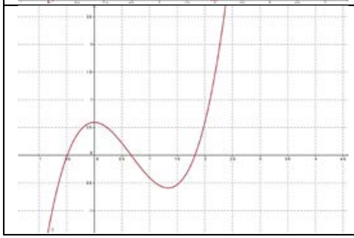
Übersicht der einzelnen Beispiele:

Graph	Funktionsterm	X-Wert des Wendepunktes	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$
	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	$x_w = 1$	$f_v(x) = x^3 - x$	$\frac{-1^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen
				
				
				
				
				
				

Lösungen

Graph	Funktionsterm	X-Wert des Wende-punktes	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$
	$f(x)=x^3-3x^2+2x$	$x_W=1$	$f_v(x)=x^3-x$	$\frac{-1^3}{27}+0<0$ 3 Nullstellen
	$g(x)=x^3-9x^2+26x-23$	(3/1)	$g_v(x)=x^3-x+1$	$\frac{(-1)^3}{27}+\frac{1^2}{4}>0$ 1 Nullstelle
	$h(x)=x^3-6x^2+11x-4$	(2/2)	$h_v(x)=x^3-x+2$	$\frac{(-1)^3}{27}+\frac{2^2}{4}>0$ 1 Nullstelle
	$i(x)=x^3+3x^2+2x+2$	(-1/2)	$i_V(x)=x^3-x+2$	$\frac{(-1)^3}{27}+\frac{2^2}{4}>0$ 1 Nullstelle
	$j(x)=x^3-3x^2+x+1$	(1/0)	$j_V(x)=x^3-2x$	$\frac{(-2)^3}{27}+0<0$ 3 Nullstellen
	$k(x)=x^3-6x^2+14x-9$	(2/3)	$k_v(x)=x^3+2x+3$	$\frac{2^3}{27}+\frac{3^2}{4}>0$ 1 Nullstelle
	$l(x)=x^3+3x^2+5x+6$	(-1/3)	$l_V(x)=x^3+2x+3$	$\frac{2^3}{27}+\frac{3^2}{4}>0$ 1 Nullstelle

	m(x)=$x^3 + 3x^2$	(-1/2)	$m_v(x) = x^3 - 3x + 2$	$\frac{(-3)^3}{27} + \frac{2^2}{4} = 0$ 2 Nullstellen
	n(x)=$x^3 - 3x^2 + 4$	(1/2)	$n_v(x) = x^3 - 3x + 2$	$\frac{(-3)^3}{27} + \frac{2^2}{4} = 0$ 2 Nullstellen
	o(x)=$x^3 - 2x^2 + \frac{16}{27}$	($\frac{2}{3}$/0)	$o_v(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$	$\frac{(-\frac{4}{3})^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen

Hinweise zu Phase 1:

Berechnung des x-Wertes des Wendepunktes:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f''(x) = 6x + 2a$
$f''(x) = 0$
$6x = -2a$
$x = -\frac{a}{3}$

Hinweis zu Phase 2:

Verschiebung so dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt. Ergänzen Sie in den fehlenden Zeilen die Rechnung und versehen Sie die einzelnen Rechenschritte mit einem Kommentar

Zur Erinnerung: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3ab^2 - b^3$

Rechnung	Kommentar
$f(x - \left(\frac{a}{3}\right) =$	
$\left(x^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a \cdot \left(x^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)x + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b \cdot (x - \left(\frac{a}{3}\right) + c$	
$\left(x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27}\right) + \left(ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + \frac{a^3}{9}\right) + \left(bx + \frac{ab}{3}\right) + c$	
$x^3 - ax^2 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$	
$x^3 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$	
$x^3 + \frac{-a^2 + 3b}{3}x + \frac{-2a^3 + 9ab}{27} + c$	

daraus folgt $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0$ mit $p = \frac{-a^2+3b}{3} \wedge q = \frac{-2a^3+9ab}{27} + c$

Verschiebung so dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt ausführlich.
Zur Erinnerung:

$$f\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) = \left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right)^3 + a\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right)^2 + b\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) + c$$
$$\left(x^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a\left(x^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)x + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) + c$$
$$\left(x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c\right)$$
$$x^3 - ax^2 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$$
$$x^3 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$$
$$x^3 + \frac{a^2 - 2a^2 + 3b}{3} \cdot x + \frac{-a^3 + 3a^3 + 9ab}{27} + c$$
$$x^3 + \frac{-a^2 + 3b}{3} \cdot x + \frac{-2a^3 + 9ab}{27} + c$$

Lösungsskizze:

Warum wird die Lösungsformel für Kubische Gleichungen in der Schule nicht unterrichtet?

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Reflektion: Notieren Sie in Stichworten die einzelnen Schritte dieses Forschungsgangs und deren Begründung.

Lösung einer Kubischen Gleichung: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$3x^3+6x^2-3x+9=0$
$x^3+2x^2-1x+3=0$

- Durch den höchsten Koeffizienten wird geteilt, dadurch ändert sich die Lösungsmenge nicht.

x^3+ax^2+bx+c
x^3+px+q

- Durch Verschiebung des Wendepunktes auf die y-Achse vereinfacht sich der allgemeine Fall.
- Der quadratische Summand fällt weg.
- Die Lösung kann anschließende durch "Rückverschiebung" gewonnen werden.

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$

- Die Lösungsformel wird angegeben und die Voraussetzungen gesucht.

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$

- Erkennen des Zusammenhangs zwischen Voraussetzung und Anzahl der Lösungen.

Die Lösungsformel für Kubischen Gleichungen liefert nur in bestimmten Fällen ein befriedigendes Ergebnis. Damit ist sie, im Unter-schied zur quadratischen Lösungsformel, kein universales Werkzeug.

Einführung in das mathematische Arbeiten am Beispiel kubischer Gleichungen

Ausgangsfragestellung:

In der Mittelstufe wird die quadratische Lösungsformel

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$$

zum Lösen quadratischer Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ gelehrt.

Für Gleichungen dritten Grades $x^3 + px + q = 0$ gibt es ebenfalls eine Lösungsformel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

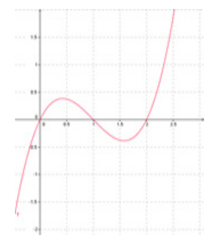
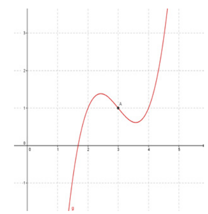
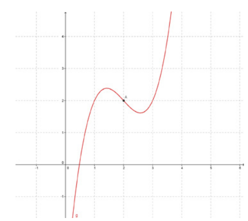
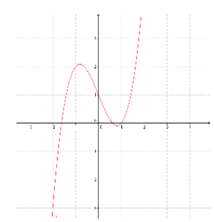
Die Frage ist: Weshalb wird diese Lösungsformel in der Schule nicht unterrichtet?

Auf dem Weg zu einer Antwort: Erste Beispiele für mathematisches Arbeiten

- Ausgehend von konkreten Beispielen ergeben sich Vermutungen, die sich allgemein belegen lassen, um so zu allgemeingültigen Aussagen zu kommen, die dann bewiesen werden.
- Um möglichst viele Beispiele miteinander vergleichen zu können, werden die einzelnen Aufgaben arbeitsteilig gelöst und anschließend auf einem Plakat zusammengetragen. Eine zeitliche Koordination ergibt sich durch die Unterteilung der Arbeitszeit in drei Arbeitsphasen.

1. Phase Teil 1

- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen mit Geogebra.
- Berechnen Sie die x-Koordinate des Wende-punktes Ihrer Funktion, notieren Sie die x-Koordinate des Wendepunktes auf dem Plakat. Achten Sie darauf, dass der Funktionsterm zum Funktionsgraphen passt.

Graph	Funktionsterm	Wendepunkt	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$
	$f(x)=x^3-3x^2+2x$	WP(1/0)	$f_v(x)=x^3-x$	$\frac{-1^3}{27}+0<0$ 3 Nullstellen
				
				
				

1. Phase Teil 2

- Analysieren Sie auch die Ergebnisse Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie man aus der Funktionsgleichung die x-Koordinate des Wendepunktes ohne Rechnung ablesen kann.
- Formulieren Sie diese Vermutung schriftlich auf einer Metaplankarte, und hängen Sie Ihre Vermutung ebenfalls auf das Plakat.
- Weisen Sie nach, dass Ihre Vermutung wahr ist, betrachten Sie dazu die allgemeine normierte Form $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$ und berechnen Sie allgemein den x-Wert des Wendepunktes.

Falls Sie nicht weiterkommen, liegt ein Hinweis bereit.

2. Phase Teil 1

- Verschieben Sie den Funktionsgraphen mit Geogebra so, dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt.
- Der mit Geogebra ermittelte Funktionsterm ist unter Umständen etwas ungenau. Deshalb ist ein exakter Nachweis erforderlich. Berechnen Sie von Hand oder mit dem CAS Tool von Geogebra den Funktionsterm der verschobenen Funktion und tragen Sie diesen ebenfalls auf dem Plakat ein.

2. Phase Teil 2

- Betrachten Sie die Ergebnisse Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Vergleichen Sie die Funktionsterme vor mit denen nach der Verschiebung. Formulieren Sie wiederum eine Vermutung.
- Weisen Sie die Vermutung anhand der allgemeinen normierten Form

$$f(x)= x^3+ax^2+bx+c \text{ nach.}$$

Falls Sie Unterstützung brauchen liegt ein Hinweis bereit.

3. Phase

- Nehmen Sie sich das Arbeitsblatt 3. Phase und bearbeiten Sie die Aufgaben.

Besprechung 3. Phase

Satz: Wenn gilt $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \geq 0$ ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

eine Lösung der Gleichung $x^3+px+q = 0$.

Besprechung 3. Phase

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$ eine Lösung, d. h. eine Nullstelle

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$ zwei Lösungen, d. h.

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ drei L

Interpretieren Sie die Ergebnisse der mathematischen Forschungsreise vor dem Hintergrund unserer Ausgangsfrage:

Weshalb wird die Lösungsformel $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$ in der Schule nicht unterrichtet?

Antworten

- Die Formel ist einfach aber unzuverlässig, in dem Sinne, dass sie nur für den Fall einer Nullstelle eine Lösung liefert, für die beiden anderen Fälle versagt die Formel.
- Die folgenden Beispiele zeigen, dass sie aber selbst für den Fall einer Nullstelle unbefriedigende Lösungen liefert.

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$$

ok

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3^3}{27} + \frac{4^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3^3}{27} + \frac{4}{4}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

Nicht ok.

Denn x = 1 ist eine Lösung , die Gleichung kann aber nur eine Lösung haben. D. h. hier kann man nicht ohne Weiteres erkennen, dass die Lösung ganzzahlig ist.

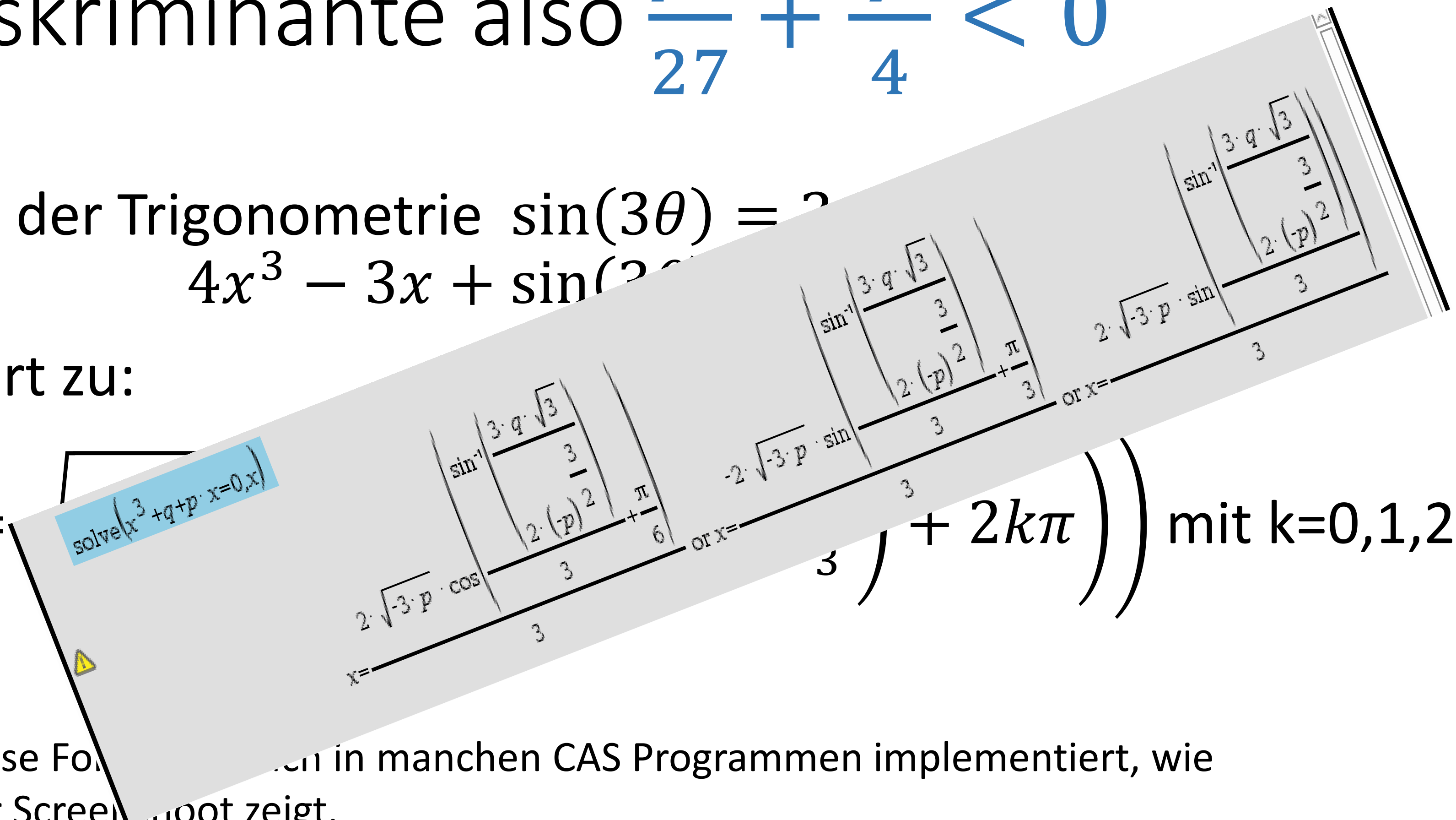
Ausblick für den Fall einer negativen Diskriminante also $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$

Aus der Trigonometrie $\sin(3\theta) = 3$

$$4x^3 - 3x + \sin(3$$

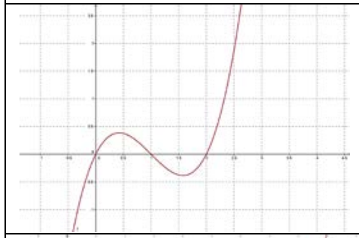
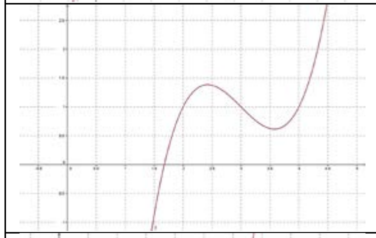
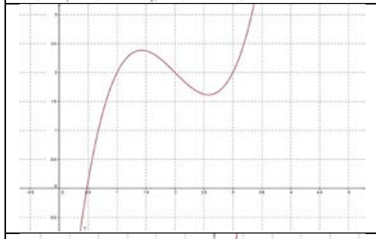
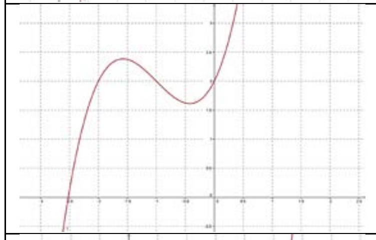
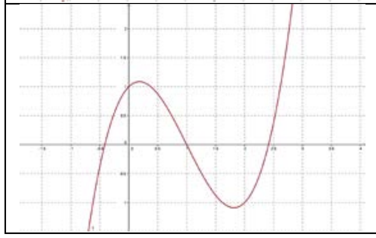
Führt zu:

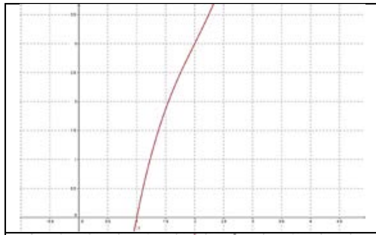
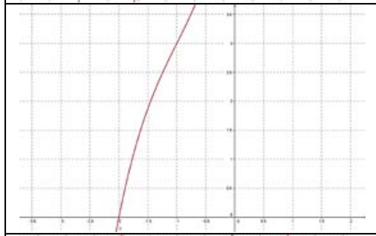
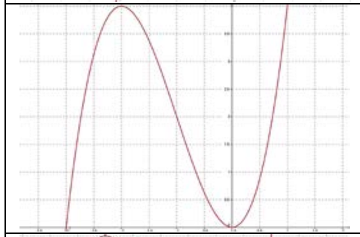
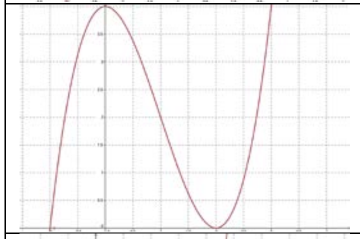
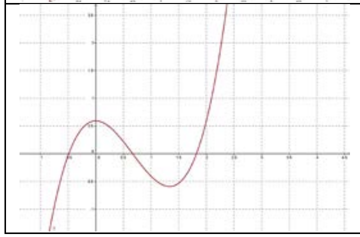
$$x = \quad 3\Big) + 2k\pi\Big)\Big)$$ mit k=0,1,2



Diese Fo in manchen CAS Programmen implementiert, wie der Scree oot zeigt.

Übersicht

Graph	Funktionsterm	X-Wert des Wendepunktes	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$
	$f(x)=x^3 - 3x^2 + 2x$	$x_w = 1$	$f_v(x)= x^3 - x$	$\frac{-1^3}{27}+0<0$ 3 Nullstellen
				
				
				
				

Zusammenfassung

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.
2. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung, insbesondere mittels eines Beweisversuches.
3. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

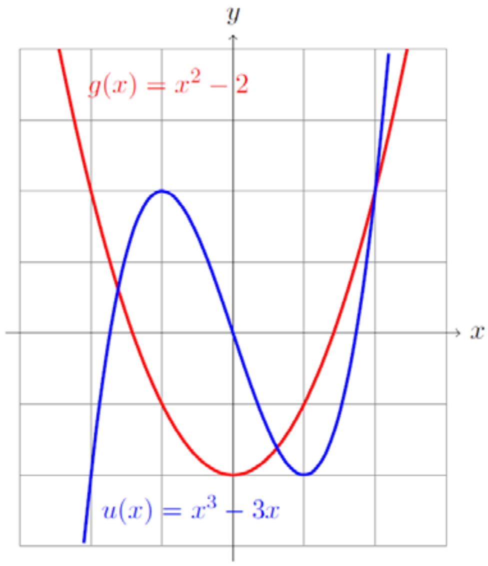
Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen" und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

Symmetrische Funktionen

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.
Definition 1.1. Eine derartige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ...

- ... gerade wenn $f(-x) = f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.
- ... ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u. Die Graphen gerader Funktionen $y = f(x)$ sind symmetrisch zur y-Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.
Beweis. Es ist nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$g(-x) =$ $= g(x)$

$u(-x) =$

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung ($f(-x) = f(x)$ bei geraden bzw. $f(-x) = -f(x)$ bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es noch so viele – sicher gestellt werden.

Symmetrische Polynome

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + . . . + a_1 x + a_0$$

wobei $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, ...an \in \mathbb{R}$ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen a_i heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.
Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als −1 definieren.)

Polynome vom Grad 2
Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form $f(x) = a_2 x_2 + a_1 x + a_0$ mit a_2 6= 0. Für $a_2 = 0$ ist der Grad kleiner als 2.

Satz 2.1. Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit f(−x1) = f(x1) an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x1) - f(x1) = \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = \\ &= [a_2 x_1^2 - a_1 x_1 + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = -2a_1 x_1 \end{aligned}$$

führt zu $a_1 x_1 = 0$. Wegen $x_1 \neq 0$ muss also $a_1 = 0$ sein. Das Polynom lautet folglich $f(x) = a_2 x^2 + a_0$. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(-x) = a_2(-x)^2 + a_0 = a_2 x^2 + a_0 = f(x)$$

Aufgabe 2.1. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = -f(x_1)$ an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels.**

Überprüfung an zwei Stellen
Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen überprüft werden.

Aufgabe 2.2. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene“ Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.2. Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ an zwei Stellen x_1 und x_2 mit

Aufgabe 2.3. Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn $f(-x) = f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.3.

Bei der Bedingung $f(-x) = f(x)$ für gerade Funktionen machen natürlich
– wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen
einen Sinn.

Beweis.

Rationale Polynome

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bei dem alle Koeffizienten a_i ($0 \leq i \leq n$) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt, gehören π und e.

Aufgabe 2.4. Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad $n \geq 1$ sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2}, 1 + \sqrt{7}$ und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

Aufgabe 2.5. Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

Weitere Erkenntnisse

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

Aufgabe 2.6. Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

Lösungen

Zusammenfassung

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.
2. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung, insbesondere mittels eines Beweisversuches.
3. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

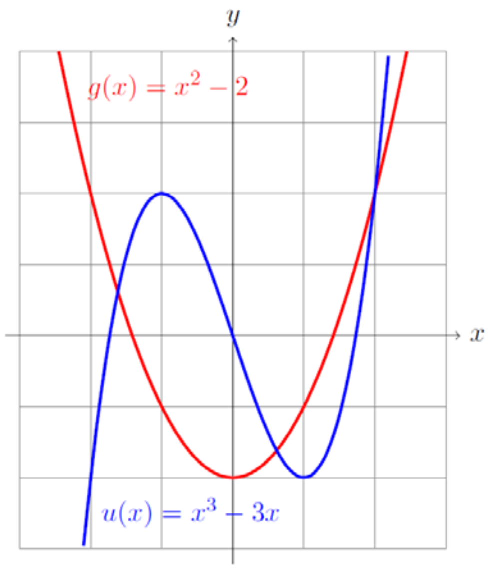
Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen“ und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

Symmetrische Funktionen

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.
Definition 1.1. Eine derartige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ...

- ... gerade wenn $f(-x) = f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.
- ... ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u. Die Graphen gerader Funktionen y = f(x) sind symmetrisch zur y-Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.
Beweis. Es ist nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

g(−x) = (−x)2 − 2 = x2 − 2 = = g(x)
u(−x) = (−x)3 − 3(−x) = −x3 + 3x = −(x3 − 3x) = −u(x)

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung (f(−x) = f(x) bei geraden bzw. f(−x) = −f(x) bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es noch so viele – sicher gestellt werden.

Symmetrische Polynome

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

wobei $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \ldots$ ...an $\in \mathbb{R}$ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen a_i heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.
Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als −1 definieren.)

Polynome vom Grad 2
Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form $f(x) = a_2 x_2 + a_1 x + a_0$ mit a_2 6= 0. Für $a_2 = 0$ ist der Grad kleiner als 2.

Satz 2.1. Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x1) = f(x1)$ an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x1) - f(x1) \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] \\ &= [a_2 x_1^2 - a_1 x_1 + a_0] - [a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0] = -2a_1 x_1 \end{aligned}$$

führt zu $a_1 x_1 = 0$. Wegen $x_1 \neq 0$ muss also $a_1 = 0$ sein. Das Polynom lautet folglich $f(x) = a_2 x^2 + a_0$. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(-x) = a_2(-x)^2 + a_0 = a_2 x^2 + a_0 = f(x)$$

Aufgabe 2.1. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit $f(-x_1) = -f(x_1)$ an einer einzigen Stelle $x_1 \neq 0$ ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Analog zur vorigen Berechnung führt

$$\begin{aligned} 0 &= f(-x_1) + f(x_1) \\ &= [a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] + [a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= [a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] + [a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0] \\ &= 2 \cdot (a_2x_1^2 + a_0) \end{aligned}$$

zu

$$a_2x_1^2 + a_0 = 0$$

Im Gegensatz zum vorigen Satz enthält diese Gleichung aber noch zwei unbekannte Parameter. Deshalb kann (natürlich) nicht geschlossen werden, dass a_2 und a_0 beide Null sind.

Beweis.

Beispielsweise erfüllt das Polynom zweiten Grades

$$f(x) = x^2 - 1$$

die Bedingung

$$f(-1) = -f(1)$$

ist aber wegen

$$f(2) = 3 \qquad \text{und} \qquad f(-2) = 3 \neq -f(2)$$

nicht ungerade.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels.**

Überprüfung an zwei Stellen

Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ an zwei „verschiedenen" Stellen überprüft werden.

Aufgabe 2.2. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene" Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

Beweis

Es ist also für eine Stelle x_1

$$0 = f(-x_1) + f(x_1)$$
$$= [a_3(-x_1)^3 + a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0] + [a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0]$$
$$= [-a_3x_1^3 + a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] + [a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0]$$
$$= 2 \cdot (a_2x_1^2 + a_0)$$

Es ist demnach

$$a_2x_1^2 + a_0 = 0$$

Für die zweite Stelle x_2 erhält man entsprechend

$$a_2x_2^2 + a_0 = 0$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$$0 = [a_2x_1^2 + a_0] - [a_2x_2^2 + a_0] = a_2[x_1^2 - x_2^2]$$

Damit die Stellen x_1 und x_2 „wirklich verschieden“ sind, darf auch nicht $x_1 = -x_2$ gelten. Sonst wären die Bedingungen $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ nämlich identisch.
Wenn aber $|x_1| \neq |x_2|$, dann ist $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$. Deshalb muss $a_2 = 0$ sein.
Eingesetzt in die erste Gleichung $a_2x_1^2 + a_0 = 0$ (oder in die zweite) folgt dann $a_0 = 0$. Das Polynom reduziert sich auf

$$f(x) = a_3x^3 + a_1x$$

Wegen

$$f(-x) = a_3(-x)^3 + a_1(-x) = -a_3x^3 - a_1x = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f ungerade.

Satz 2.2. Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn $f(-x_1) = -f(x_1)$ und $f(-x_2) = -f(x_2)$ an zwei Stellen x_1 und x_2 mit
$|x_1| \neq |x_2|$.

Aufgabe 2.3. Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn $f(-x) = f(x)$ an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

Satz 2.3.
Ein Polynom f vom Grad ≤ 4 mit $f(-x_1) = f(x_1)$ und $f(-x_2) = f(x_2)$ an zwei Stellen $0 < x_1 < x_2$ ist gerade.

Bei der Bedingung $f(-x) = f(x)$ für gerade Funktionen machen natürlich – wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen einen Sinn.

Beweis

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Für eine Stelle x_1 ist

$0 = f(-x_1) - f(x_1)$

$= [a_4(-x_1)^4 + a_3(-x_1)^3 + a_2(-x_1)^2 + a_1(-x_1) + a_0]$

$-[a_4x_1^4 + a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0]$

$= [a_4x_1^4 - a_3x_1^3 + a_2x_1^2 - a_1x_1 + a_0] - [a_4x_1^4 + a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0]$

$= -2 \cdot (a_3x_1^3 + a_1x_1)$

$= -2x_1 \cdot (a_3x_1^2 + a_1)$

Wegen $x_1 \neq 0$ ist demnach

$a_3x_1^2 + a_1 = 0$

Für die zweite Stelle x_2 erhält man entsprechend

$a_3x_2^2 + a_1 = 0$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$0 = [a_3x_1^2 + a_1] - [a_3x_2^2 + a_1] = a_3[x_1^2 - x_2^2]$

Wegen $0 < x_1 < x_2$ ist $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$. Deshalb muss $a_3 = 0$ sein. Eingesetzt in die erste Gleichung $a_3x_1^2 + a_1 = 0$ (oder in die zweite) folgt dann $a_1 = 0$.

Das Polynom reduziert sich auf

$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2$

Wegen

$f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(-x)^2 = a_4x^4 - a_2x^2 = f(x)$

für alle $x \in R$ ist f gerade.

Rationale Polynome

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bei dem alle Koeffizienten a_i ($0 \leq i \leq n$) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt, gehören π und e.

Aufgabe 2.4. Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad $n \geq 1$ sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2}, 1 + \sqrt{7}$ und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

Beweis

$\sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle des rationalen Polynoms

$$x^3 - 2$$

$1 + \sqrt{7}$ ist Nullstelle von

$$(x - 1)^2 - 7$$

Eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ist Nullstelle von

$$x - q$$

Aufgabe 2.5. Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

Es genügt, für eine beliebige transzendente Zahl x_1 (etwa $x_1 = \pi$) $f(x_1)$ und $f(-x_1)$ zu bestimmen.

Ist $f(-x_1) = f(x_1)$, dann ist f gerade.
Ist $f(-x_1) = -f(x_1)$, dann ist f ungerade.
Ansonsten ist das rationale Polynom nicht symmetrisch.

Beweis.

Es ist

$$f(-x_1) = a_0 + a_1(-x_1) + a_2(-x_1)^2 + \ldots + a_n(-x_1)^n$$
$$= a_0 - a_1x_1 + a_2x_1^2 \mp \ldots + (-1)^n a_n x_1^n$$
$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n$$
$$f(-x_1) + f(x_1) = 2 \cdot [a_0 + a_2x_1^2 + \ldots + a_px_1^p]$$
$$f(-x_1) - f(x_1) = -2 \cdot [a_1x_1 + a_3x_1^3 + \ldots + a_qx_1^q]$$

wobei p die größte gerade Zahl $\leq$ n und q die größte ungerade Zahl $\leq$ n ist.
Für $f(-x_1) = f(x_1)$ ist

$$a_1x_1 + a_3x_1^3 + \ldots + a_qx_1^q = 0$$

Weil x_1 transzendent ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein, denn nur das Nullpolynom hat x_1 als Nullstelle.
Damit ist

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_px^p$$

gerade. Entsprechend müssen für $f(-x_1) = -f(x_1)$ wegen

$$a_0 + a_2x_2^2 + \ldots + a_px^p = 0$$

alle geraden Koeffizienten von f verschwinden.
Dann ist

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + \ldots + a_qx^q$$

ungerade. Gilt weder $f(-x_1) = f(x_1)$ noch $f(-x_1) = -f(x_1)$, kann f nicht symmetrisch sein.

Weitere Erkenntnisse

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

Aufgabe 2.6. Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

Interessante Kriterien für die Symmetrie von Polynomen sind etwa:

- Ein Polynom, bei dem alle ungeraden Koeffizienten a_{2k-1} verschwinden, ist gerade.

Das ist leicht direkt nachzuweisen.

- Ein Polynom, bei dem alle geraden Koeffizienten a_{2k} verschwinden, ist ungerade.

Auch das ist einfach zu beweisen.

- Ein Polynom ist sogar genau dann gerade, wenn (in der Standardform) nur gerade Hochzahlen auftreten.

Das ist nicht mehr so leicht zu zeigen.

- Entsprechend ist ein Polynom genau dann ungerade, wenn (in der Standardform) nur ungerade Hochzahlen vorkommen.

Auch das ist nicht so leicht zu beweisen.

- Das Nullpolynom ist die einzige (überall definierte) Funktion, die gerade und ungerade zugleich ist.

Der Nachweis ist einfach.

- Ein Polynom f(x) vom Grad $\leq 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $f(-x) = f(x)$ an k Stellen $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ ist gerade.

Das ist eine Verallgemeinerung der uns schon bekannten Fälle $k = 1$ und $k = 2$.

- Ein Polynom f(x) vom Grad $\leq 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $f(-x) = -f(x)$ an k Stellen $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ ist ungerade.

Das ist eine Verallgemeinerung des uns schon bekannten Falles $k = 2$.

Didaktische Hinweise

Betragsgleichungen

In dieser LPE findet man ein Arbeitsblatt mit einfachen Betragsgleichungen (3_1_Betragsgleichungen).

Weitere Aufgaben findet man in LPE5 unter 5.3 Betragsfunktionen. Dort (5_3_Betragsfunktion_Arbeitsblatt) wird zunächst die Betragsfunktion eingeführt als abschnittsweise definierte Funktion. Anschließend wird ihr Schaubild transformiert und die zugehörige Funktion durch Fallunterscheidung ohne Betragsstriche geschrieben. Dieselben Fallunterscheidungen werden anschließend benutzt, um Betragsgleichungen und -ungleichungen zu lösen.

Der Betrag einer Zahl

Der Betrag (auch Absolutbetrag) einer reellen Zahl gibt ihren Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden an. Der **Betrag einer reellen Zahl** wird mit Hilfe der Variablen a wie folgt erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$|4| =$ ______________ , $|-4| =$ ______________ , $\left|-\frac{2}{7}\right| =$ ______________ , $|0| =$ _____________ ,

für $x > 0$: $|x| =$ __________________ ,für $x < 0$: $|x| =$ ________________ .

Nach der Definition ist der Betrag einer reellen Zahl stets ___________________________________, da ein Abstand nicht negativ sein kann.

Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit einer Lösungsvariablen heißt **Betragsgleichung**, wenn die Lösungsvariable in Betragsstriche eingeschlossen ist.

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

(2) $|x - 4| = 18$

Lösen von Betragsgleichungen

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

Da nicht bekannt ist, ob $x \geq 0$ oder $x < 0$ ist, ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. Fall:

____

____

2. Fall:

____

____

____

____

(2) $|x - 4| = 18$

1. Fall:

____

____

2. Fall:

____

____

Lösung: Der Betrag einer Zahl

Der Betrag (auch Absolutbetrag) einer reellen Zahl gibt ihren Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden an. Der **Betrag einer reellen Zahl** wird mit Hilfe der Variablen a wie folgt erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$|4| = 4$, $|-4| = -(-4) = 4$, $\left|-\frac{2}{7}\right| = -(-2/7) = 2/7$, $|0| = 0$,

für $x > 0$: $|x| = x$, für $x < 0$: $|x| = -x$.

Nach der Definition ist der Betrag einer reellen Zahl stets eine nichtnegative reelle Zahl, da ein Abstand nicht negativ sein kann.

Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit einer Lösungsvariablen heißt **Betragsgleichung**, wenn die Lösungsvariable in Betragsstriche eingeschlossen ist.

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

(2) $|x - 4| = 18$

Lösen von Betragsgleichungen

Beispiele:

(1) $|x| = 4$

Da nicht bekannt ist, ob $x \geq 0$ oder $x < 0$ ist, ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. **Fall**: Für $x \geq 0$ gilt $|x| = x$. Wir setzen x für $|x|$ in die Gleichung ein.

$$x = 4$$

2. **Fall**: Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$. Wir setzen $-x$ für $|x|$ in die Gleichung ein.

$$-x = 4$$
$$x = -4$$
$$L = \{-4; 4\}$$

(2) $|x - 4| = 18$

1. Fall: $|x - 4| \geq 0 \iff x \geq 4$

$$|x - 4| = x - 4$$
$$x - 4 = 18$$
$$x = 22$$

2. Fall: $|x - 4| < 0 \iff x < 4$

$$|x - 4| = -(x - 4)$$
$$-x + 4 = 18$$
$$-x = 14$$
$$x = -14$$

$$L = \{-14; 22\}$$

Wurzelgleichungen

I. Lösungen und Scheinlösungen

Eine Gleichung, in der die Variable x in einem Wurzelterm steht, heißt Wurzelgleichung, z.B. $\sqrt{x} = x - 2$ oder $\sqrt{x} - \sqrt{x-9} = 1$.

Um die Gleichung nach x auflösen zu können, muss man den Wurzelterm quadrieren, was jedoch keine Äquivalenzumformung ist und deshalb zu Scheinlösungen führen kann. Auch lässt sich eine Gleichung, in der mehrere Wurzelterme auftreten, meist nicht durch einmaliges Quadrieren lösen.

Beispiele:

a) $3 \cdot \sqrt{x-2} = x$

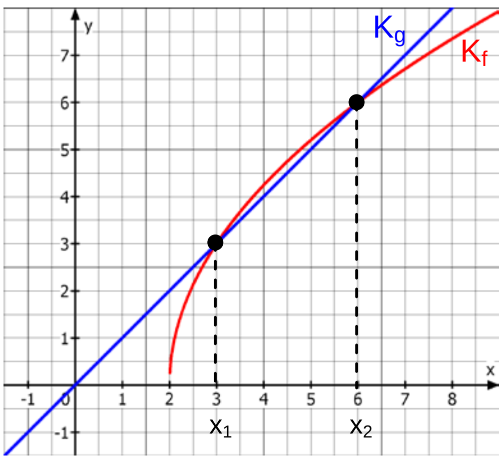
Quadriert man beide Seiten der Gleichung, so ergibt sich

$9 \cdot (x-2) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$.

Dass dies tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Wurzelgleichung sind, bestätigt man durch Einsetzen: $3 \cdot \sqrt{3-2} = 3$ bzw. $3 \cdot \sqrt{6-2} = 6$.

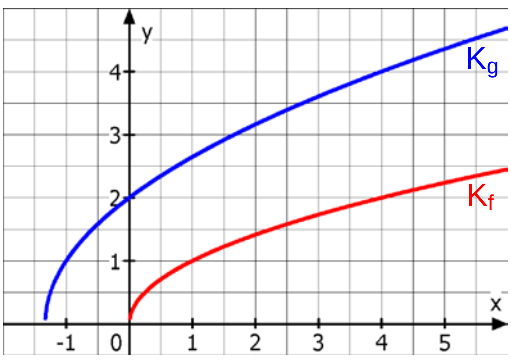
Interpretiert man die ursprüngliche Gleichung als Schnittbedingung der Graphen zweier Funktionen $f: f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2}$ und $g: g(x) = x$, so lassen sich diese beiden Lösungen in nebenstehendem Koordinatensystem veranschaulichen.



b) $\sqrt{x} = \sqrt{4+3x}$

Quadrieren führt auf die lineare Gleichung $x = 4 + 3x$ mit der Lösung $x = -2$.

Dies kann jedoch keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sein, da beim Einsetzen sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung unter der Wurzel eine negative Zahl steht. Die Gleichung besitzt somit keine Lösung. Dies zeigt auch die Veranschaulichung mit den Graphen der Funktionen $f: f(x) = \sqrt{x}$ und $g: g(x) = \sqrt{4+3x}$.



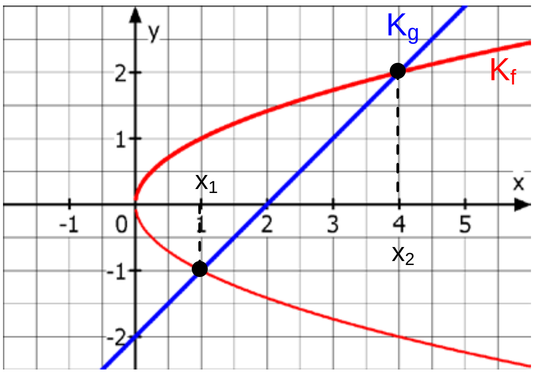
Die Lösung $x = -2$ der linearen Gleichung $x = 4 + 3x$ ist eine Scheinlösung, die durch das Quadrieren der ursprünglichen Gleichung "eingeschleppt" wurde. Dies zeigt sich jedoch erst bei der Probe, d.h. beim Einsetzen in die ursprüngliche Wurzelgleichung.

c) $\sqrt{x} = x - 2$

Quadrieren: $x = (x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Beide Lösungen lassen sich in die ursprüngliche Wurzelgleichung einsetzen. Bei $x_1 = 1$ ergibt sich jedoch ein Widerspruch: $\sqrt{1} = 1 - 2 = -1$. x_1 ist also wieder eine Scheinlösung, während sich für $x_2 = 4$ eine wahre Aussage ergibt: $\sqrt{4} = 4 - 2 = 2$. Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also nur die Lösung $x = 4$.

In diesem Fall lassen sich sowohl die Lösung $x_2 = 4$ als auch die Scheinlösung $x_1 = 1$ im Koordinatensystem veranschaulichen. $x_1 = 1$ wäre die Lösung der Gleichung $-\sqrt{x} = x - 2$, die beim Quadrieren auf die selbe quadratische Gleichung führt.



Aufgabe:

Löse folgende Gleichungen und veranschauliche die Lösungen mit Hilfe geeigneter Funktionsgraphen.

a) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{4}x + 1$ b) $\sqrt{x+2} = -x + 4$ c) $2 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{5-x}$

d) $\sqrt{3-x} = \frac{1}{2}x$ e) $3 \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x-6}$ f) $\sqrt{x-5} = 1 - \frac{1}{3}x$

II. Lösen durch Isolieren und Quadrieren

Steht der Wurzelterm nicht alleine auf einer Seite der Gleichung, so muss man diesen zuerst "isolieren", bevor man beide Seiten der Gleichung quadriert.

Beispiele:

a) $\sqrt{x} + 3 = 4x$

Sofortiges Quadrieren würde auf der linken Seite durch das doppelte Produkt der binomischen Formel wieder einen Wurzelterm ergeben. Die Wurzel muss zunächst isoliert werden, d.h. sie muss alleine auf einer Seite der Gleichung stehen.

Isolieren: $\sqrt{x} + 3 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 4x - 3$

Quadrieren: $x = (4x-3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^2 - 25x + 9 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung: $x_1 = \frac{9}{16}$; $x_2 = 1$

Probe: $\sqrt{\frac{9}{16}} + 3 = 4 \cdot \frac{9}{16}$; falsche Aussage, d.h. $x_1 = \frac{9}{16}$ ist keine Lösung.

$\sqrt{1} + 3 = 4 \cdot 1$; wahre Aussage, d.h. $x_2 = 1$ ist eine Lösung.

Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also als einzige Lösung $x = 1$.

b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{13-x}=4$

In diesem Fall muss man zweimal quadrieren, um die Wurzeln aufzulösen.

1. Möglichkeit:

Sofort quadrieren:

$\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{13-x}\right)^2=4^2$

$x-3+2\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{13-x}+13-x=16$

Isolieren: $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{13-x}=3$

Nochmals quadrieren:

$(x-3)(13-x)=9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-16x+48=0$

2. Möglichkeit:

Erst isolieren, dann quadrieren:

Isolieren: $\sqrt{x-3}=4-\sqrt{13-x}$

Quadrieren: $x-3=16-8\cdot\sqrt{13-x}+13-x$

Isolieren: $4\cdot\sqrt{13-x}=-x+16$

Quadrieren: $16\cdot(13-x)=x^2-32x+256$

$\Leftrightarrow \quad x^2-16x+48=0$

Beide Varianten führen auf die selbe quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1=4$; $x_2=12$.

Probe: $\sqrt{4-3}+\sqrt{13-4}=4$; wahre Aussage, d.h. $x_1=4$ ist Lösung.

$\sqrt{12-3}+\sqrt{13-12}=4$; wahre Aussage, d.h. $x_2=12$ ist Lösung.

Die ursprüngliche Wurzelgleichung hat also die beiden Lösungen $x_1=4$; $x_2=12$.

Aufgabe:

Löse folgende Gleichungen und überprüfe deine Rechnung graphisch mit deinem GTR oder CAS.

a) $\sqrt{x}+2x=10$

b) $\sqrt{x-1}+7=x$

c) $3\cdot\sqrt{x+5}=5-x$

d) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$

e) $2\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}=1$

f) $\sqrt{2x-3}+2\cdot\sqrt{x+10}=11$

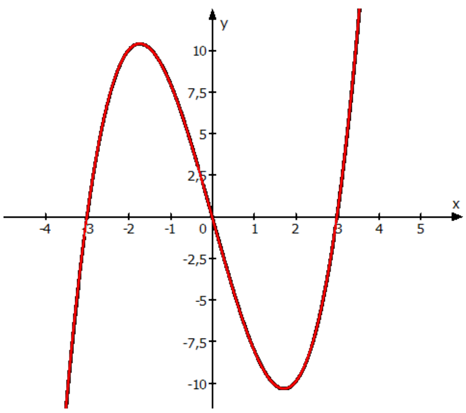
Ungleichungen

I. Lösen mit Hilfe des Schaubilds

Eine Ungleichung der Form $f(x) < 0$ (oder $f(x) > 0$, $f(x) \le 0$, $f(x) \ge 0$) lässt sich mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f lösen, indem man abliest, in welchen x-Bereichen K_f oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft. Bei einer stetigen Funktion kann ein Vorzeichenwechsel nur an einer Nullstelle erfolgen. Deshalb genügt es die Nullstellen der Funktion zu kennen und zu wissen, ob an der jeweiligen Nullstelle ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet oder nicht.

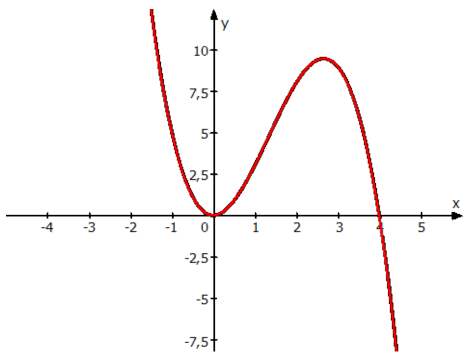
Beispiele:

a) $x^3 - 9x < 0$



Die Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x+3)$
besitzt drei einfache Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, an denen jeweils ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Das Schaubild verläuft von links unten nach rechts oben (Koeffizient vor x^3 ist positiv). Damit lässt sich K_f im Wesentlichen skizzieren und die Lösungsmenge der Ungleichung ablesen:
$L = \{ x \mid x<-3 \} \cup \{ x \mid 0<x<3 \} =]-\infty;-3[\cup]0;3[$

b) $-x^3 + 4x^2 \le 0$



Die Funktion f mit
$f(x) = -x^3 + 4x^2 = -x^2(x - 4)$
besitzt eine einfache Nullstelle (mit VZW) bei $x_1 = 4$ sowie eine doppelte Nullstelle (ohne VZW) bei $x_2 = 0$. Das Schaubild verläuft von links oben nach rechts unten (Koeffizient vor x^3 ist negativ). Damit lässt sich K_f im Wesentlichen skizzieren und die Lösungsmenge der Ungleichung ablesen:
$L = \{ x \mid x\ge4 \} \cup \{0\} = [4;\infty[\cup \{0\}$

Aufgabe:
Löse folgende Ungleichungen mit Hilfe des Schaubilds.

a) $x^2 - x < 0$
b) $-x^2 + 5x \ge 0$
c) $(x+2)(x-3) > 0$
d) $-x^2 + x + 20 \ge 0$
e) $x^2 + 2x + 2 \le 0$
f) $-x^2 + 6x - 9 < 0$
g) $(x+3)(x+1)(x-4) \le 0$
h) $-(x+5)^2(x+2)(x-1) \ge 0$
i) $(x+4)^2(x+1)(x-2)^2 > 0$
j) $(x+7)^3(x+3)(x-2)^2 \le 0$
k) $-x^3(x+2)^4(x-3)^2 < 0$
l) $2^x - 4 \le 0$
m) $-2\cdot3^x + 9 > 0$
n) $3^{-x} - 7 < 0$
o) $-3\cdot5^{-x} - 2 \le 0$

II. Lösen mit Hilfe von Umformungen

Ein elementares Prinzip beim Lösen von *Gleichungen* besteht darin, diese durch Umformungen zu vereinfachen, z.B. indem man beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl (ungleich Null) multipliziert. Mit Hilfe dieser Umformungen lassen sich auch *Ungleichungen* vereinfachen. Man muss hierbei jedoch beachten, dass sich das Ungleichheitszeichen bei einer solchen Umformung evtl. ändert, und ggf. eine Fallunterscheidung durchführen.

1. Aufgabe

Gib bei den folgenden Umformungen der Ungleichung $a < b$ an, ob sich das Ungleichheitszeichen ändert, oder nicht. Mache dazu mehrere Zahlenbeispiele und variiere insbesondere das Vorzeichen der beteiligten Zahlen. Schreibe dein Ergebnis ggf. mit einer Fallunterscheidung auf. Zeichne ggf. das Schaubild der zur entsprechenden Umformung gehörigen Funktion und versuche damit deine Ergebnisse zu erklären.

a) Vertauschen der linken und rechten Seite der Ungleichung
b) Addieren der selben Zahl c auf beiden Seiten der Ungleichung
c) Multiplizieren mit der selben Zahl c auf beiden Seiten der Ungleichung
d) Logarithmieren beider Seiten der Ungleichung

Freiwillig:

e) Kehrwert bilden auf beiden Seiten der Ungleichung
f) Wurzel ziehen auf beiden Seiten der Ungleichung
g) Quadrieren beider Seiten der Ungleichung

2. Aufgabe

Löse folgende Ungleichungen mit Hilfe von Umformungen.

a) $3x - 5 > 1$
b) $7 - 2x \leq 4$
c) $2x + 3 \geq 7x - 12$
d) $x^2 < 16$
e) $3x^2 \geq 75$
f) $(x-3)^2 > 4$
g) $\frac{2x-1}{x-1} > 0$
h) $\frac{2x-3}{x-2} \leq 1$
i) $\frac{1}{x+3} < \frac{2}{x}$
j) $3^x > 12$
k) $5^{x-2} < 8$
l) $10 - 3 \cdot 2^x \geq 1$

III. Lösen mit Hilfe von Vorzeichenbetrachtungen und Aussagenlogik

Steht auf der rechten Seite einer Ungleichung Null, so kann diese gelöst werden, indem man eine Vorzeichenbetrachtung der linken Seite durchführt. Dies ist vor allem dann Erfolg versprechend, wenn auf der linken Seite ein Produkt oder ein Quotient steht.

Beispiele:

a) $(x - 1)\cdot(x + 3) > 0$

Das Produkt zweier Zahlen ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, in diesem Fall also, wenn

$(x - 1 > 0 \text{ und } x + 3 > 0)$ oder $(x - 1 < 0 \text{ und } x + 3 < 0)$

$\Leftrightarrow (x > 1 \text{ und } x > -3)$ oder $(x < 1 \text{ und } x < -3)$

$\Leftrightarrow x > 1$ oder $x < -3$

und damit $L = \{ x \mid x > 1 \text{ oder } x < -3 \} = \{ x \mid x > 1 \} \cup \{ x \mid x < -3 \} =]-\infty;-3[\cup]1;\infty[$

b) $\frac{2x-3}{x+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x+1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3-(x+1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+1} < 0$

Der Quotient zweier Zahlen ist genau dann negativ, wenn eine der Zahlen positiv und die andere negativ ist, in diesem Fall also, wenn

$(x - 4 > 0 \text{ und } x + 1 < 0)$ oder $(x - 4 < 0 \text{ und } x + 1 > 0)$

$\Leftrightarrow (x > 4 \text{ und } x < -1)$ oder $(x < 4 \text{ und } x > -1)$

$\Leftrightarrow x > -1$ und $x < 4$ (da die Aussage in der ersten Klammer immer falsch ist)

und damit $L = \{ x \mid x > -1 \text{ und } x < 4 \} =]-1;4[$

c) Besteht das Produkt aus mehr als zwei Faktoren, so wird diese Methode schnell unübersichtlich:

$x\cdot(x - 2)\cdot(x + 5) > 0$

Das Produkt von drei Zahlen ist genau dann positiv, wenn alle Faktoren positiv sind oder zwei Faktoren negativ und der dritte positiv sind, in diesem Fall also, wenn

$(x > 0 \text{ und } x - 2 > 0 \text{ und } x + 5 > 0)$ oder $(x < 0 \text{ und } x - 2 < 0 \text{ und } x + 5 > 0)$

oder $(x < 0 \text{ und } x - 2 > 0 \text{ und } x + 5 < 0)$ oder $(x > 0 \text{ und } x - 2 < 0 \text{ und } x + 5 < 0)$

Aufgabe:

a) Führe das Beispiel c) zu Ende und löse es auch wie in Abschnitt I. mit Hilfe des Schaubildes. Welche Methode gefällt dir besser?

b) Welche der bisherigen Ungleichungen lassen sich mit der beschriebenen Methode der Vorzeichenbetrachtung lösen (evtl. nach Umformung und Faktorisierung)? Löse sie mithilfe dieser Methode und vergleiche mit der bereits ermittelten Lösungsmenge.

c) Wie viele Fälle sind bei 4 Faktoren zu unterscheiden, wie viele bei 11?

1. Algebraische Kurven

Didaktische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler kennen Geraden und Parabeln als Schaubilder ganzrationaler Funktionen. Im ersten Schritt zeigt man den Schülerinnen und Schülern, dass man diese Schaubilder als Lösungsmenge der entsprechenden impliziten Funktionsgleichung interpretieren kann. Im nächsten Schritt diskutiert man Kurven (Kreis, Ellipse), für die keine explizite Funktionsgleichung existiert. Die zugehörigen impliziten Funktionsgleichungen lassen sich aber leicht angeben. Danach lässt man die Schülerinnen und Schüler mit einem geeigneten Visualisierungswerkzeug entdecken, wie sich Änderungen an der impliziten Funktionsgleichung auf die Kurvenform auswirken. Die Schüler und Schülerinnen entdecken so die Kardioide und Herzflächen im Dreidimensionalen.

Wenn man das Thema algebraische Kurven weiter vertiefen möchte bieten sich folgende Fragestellungen an:

1. Schnitt zweier Kurven (Gerade – Kreis, Gerade – Ellipse, Kreis – Kreis)
2. Ableitung der impliziten Funktionsgleichung. Man erhält nun eine implizite Gleichung der Ableitung.
3. Parametrisierung der Kurven.
4. Bestimmung einer Kreisgleichung aus 3 Punkten

Falls die Schülerinnen und Schüler bereits Kenntnisse im Bereich Vektorgeometrie besitzen, kann der Zusammenhang zwischen impliziter Darstellung und expliziter Darstellung thematisiert werden (Koordinatenform – Parameterform).

Links:

Theorie und Visualisierung algebraischer Kurven und Flächen (Fortbildung für Mathematiklehrer): www.mathematik.uni-kl.de/~keilen/download/Lehre/EMWS08/fortbildung.pdf

Skript zur impliziten und expliziten Darstellung von Funktionen. Implizite on: www.htl-lienz.tsn.at/htl/zusatz/unterricht_interaktiv/ganf/mathe/explizite_implizite_Funktion.pdf

SURFER, ein Javaprogramm, mit dem man den Zusammenhang zwischen Formeln und Formen, also zwischen Mathematik und Kunst auf interaktive Weise erleben kann: www.imaginary.org/de/program/surfer

Newton-Verfahren

1. Definition

Das Newton Verfahren wird zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen einer Funktion verwendet.
Die Idee des Verfahrens besteht darin, sich den Nullstellen einer Funktion durch die Nullstellen ihrer Tangenten anzunähern.

2. Newton-Verfahren

Zunächst schafft man sich, beispielsweise durch eine graphische Darstellung, eine ungefähre Vorstellung von der Lage der Nullstelle und wählt so einen geeigneten Startwert x_0 aus.

1. Anschließend bestimmt man die Nullstelle x_1 der Tangente in x_0 mit folgender Formel
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
2. Nun verwendet man den berechneten Wert x_1 als neuen Startwert. Es entsteht die Rechenfolge
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$\dots$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Diese Rechenfolge wird solange fortgeführt, bis sich x_{k+1} und x_k hinreichend wenig unterscheiden. Ist dies der Fall, so ist x_{k+1} eine Näherung der gesuchten Nullstelle der Funktion.

3. Rechenbeispiel

Bestimme mithilfe des Newton-Verfahrens die Nullstelle von $f(x) = -x^3 - 4x + 10$
→ $0 = -x^3 - 4x + 10$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	90	49	26	15	10	5	-6	-29	-70

Mithilfe einer Wertetabelle kann man erkennen, dass sich die Nullstelle der Funktion zwischen $x = 1$ und $x = 2$ befinden muss. Daher lässt sich als Startwert ein Wert x_0 aus dem Intervall $[1,2]$ beliebig wählen, z. B. $x = 1$.

Einstieg

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - \cos(x)$.

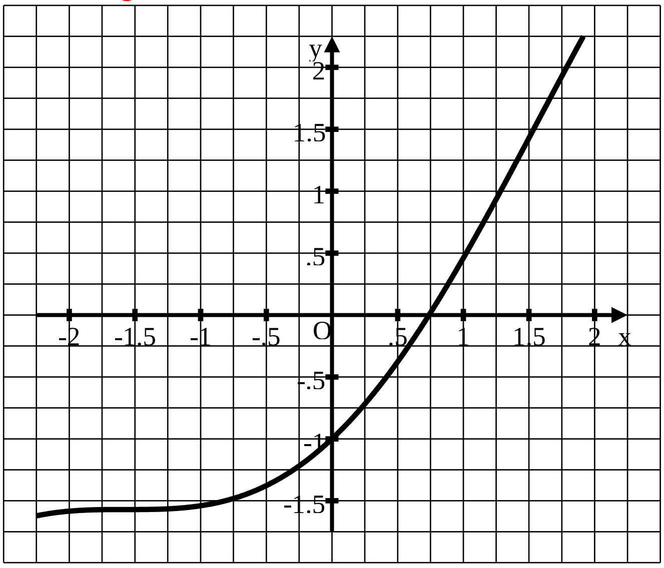
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Intervallhalbierungsverfahrens die Nullstelle dieser Funktion und bewerten Sie die Konvergenzgeschwindigkeit.

c) Ermitteln Sie nun die Gleichung der Tangente an das Schaubild f im Punkt $P\left(0{,}8 \middle| f(0{,}8)\right)$ sowie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse.
Vergleichen Sie das Verfahren aus Teilaufgabe b) mit dieser Methode hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit. Was fällt Ihnen auf?

Lösungsvorschlag

a)



b) Intervallhalbierungsverfahren:

Aufgrund der Zeichnung in Teilaufgabe a) lässt sich bereits das kleine Intervall [0,7;0,8] erkennen, das die anzunähernde Nullstelle beinhalten muss. Dies kann rechnerisch durch $f(0{,}7) < 0$ und $f(0{,}8) > 0$ belegt werden. Daher kann als erstes Intervall [0,7;0,8] gelten.

Die weiteren Intervalle, die sich mithilfe des Intervallhalbierungsverfahrens ergeben, lauten:

$m_1 = 0{,}75: f(0{,}7) < 0\ und\ f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7; 0{,}75]$

$m_2 = 0{,}725: f(0{,}725) < 0\ und\ f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}725; 0{,}75]$

$m_3 = 0{,}7375: f(0{,}7375) < 0\ und\ f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7375; 0{,}75]$

$m_4 = 0{,}74375: f(0{,}7375) < 0\ und\ f(0{,}74375) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7375; 0{,}74375]$

Wenn nun wieder die Mitte des Intervalls gewählt wird, ergibt sich nach 4 Schritten die Nullstelle von $f(x) = x - \cos(x)$ auf zwei Dezimalstellen gerundet bei $x \approx 0{,}74$. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens wirkt nicht sonderlich schnell.

c) Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$, $P\big(0{,}8\big|f(0{,}8)\big)$

$f(0{,}8) \approx 0{,}103,\ f'(0{,}8) \approx 1{,}717 \rightarrow y = 1{,}717(x - 0{,}8) + 0{,}103 = 1{,}717x - 1{,}27$

$y = 0 \rightarrow x \approx 0{,}74$

Das Ergebnis, das mit dem Intervallhalbierungsverfahren erst nach 4 Schritten erzielt wird, stellt sich bei dem Verfahren mit der Tangente unmittelbar im ersten Schritt ein.

→ Es gibt effizientere Verfahren als die bisher bekannten!

Übungsaufgaben Newton-Verfahren

Aufgabe 1:
Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

a) Wähle als Startwert $x_0 = 2{,}5$. Berechne damit zunächst den Funktionswert $f(x_0)$.
Berechne anschließend die Steigung der Tangenten an den Graphen im Kurvenpunkt $(x_0|f(x_0))$.

b) Ermittle den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse. Die x-Koordinate liefert den neuen „Näherungswert" x_1. Dieser Wert ist anschließend der neue „Startwert". Berechne damit x_2.

Aufgabe 2:
Berechne mit dem Newton-Verfahren den Schnittpunkt der Funktionen
$f(x) = e^x$ und $g(x) = x^3 + x^2 - 3$. Verwende als Startwert $x_0 = 3{,}5$.

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x + x$.
Zeige, dass f genau eine Nullstelle $x^* \in [-1{,}0]$ besitzt und führe für $x_0 = 0$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens durch.
(Quelle: 10. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Mathematik", WS 13/14, KIT)

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:

a) $f(2{,}5) = 15{,}625$, $f'(x) = 3x^2 + 2$

Steigung der Tangenten im Kurvenpunkt ≙ Funktionswert der 1. Ableitung im Kurvenpunkt:

$f'(2{,}5) = 20{,}75$

b) Bestimmung der Tangentengleichung $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$:

$y = 20{,}75 \cdot (x - 2{,}5) + 15{,}625 = 20{,}75x - 36{,}25$

Bedingung für Schnittpunkt der Tangenten mit der x-Achse: $y = 0$:

$20{,}75x - 36{,}25 = 0 \rightarrow x \approx 1{,}747$

Berechnung von x_2: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}747 - \frac{3{,}826}{11{,}156} \approx 1{,}404$

Aufgabe 2:

Schnittpunkt von $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^3 + x^2 - 3$: $e^x = x^3 + x^2 - 3$

→ Umformung zum Nullstellenproblem für Newton-Verfahren: $e^x - x^3 - x^2 + 3 = 0$

neues $f(x)$: $f(x) = e^x - x^3 - x^2 + 3$; $f'(x) = e^x - 3x^2 - 2x$

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert $x_0 = 3{,}5$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3{,}5 - \frac{f(3{,}5)}{f'(3{,}5)} = 3{,}5 - \frac{-19}{-10{,}63} \approx 1{,}71$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}71 - \frac{f(1{,}71)}{f'(1{,}71)} = 1{,}71 - \frac{0{,}6}{-6{,}66} \approx 1{,}8$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}8 - \frac{f(1{,}8)}{f'(1{,}8)} = 1{,}8 - \frac{-0{,}02}{-7{,}27} \approx 1{,}797$$

Aufgabe 3

f besitzt genau eine Nullstelle in $[-1{,}0]$, wenn $f(-1)$ und $f(0)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen: (hier besteht die Möglichkeit, den Begriff der „Stetigkeit“ zu erläutern)

$f(x) = e^x + x$: $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0 \rightarrow$ Vorzeichenwechsel, der Nullstelle bedingt

Newton-Verfahren: $f(x) = e^x + x \rightarrow f'(x) = e^x + 1$

$x_0 = 0$; $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} \approx -0{,}57$$

Übungsaufgaben Regula falsi

Aufgabe 1:

Bestimmt werden soll eine numerische Annäherung von $\sqrt{2}$.

a) Überlegen Sie sich eine Gleichung, mit der man einen numerischen Wert von $\sqrt{2}$ mithilfe der Regula falsi ermitteln kann.

b) Führen Sie mithilfe der Gleichung aus a) drei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 2$ durch.

c) Führen Sie mithilfe der Gleichung aus a) drei Schritte der Regula Falsi mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ durch. Vergleiche anhand der Ergebnisse aus b) und c) die Konvergenzgeschwindigkeit beider Verfahren.
(Quelle: 1. Übungsblatt zur Vorlesung „Numerik“, SS11, Universität Ulm)

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 3$ mithilfe der Regula falsi. Die Nullstelle liegt zwischen $x = 1$ und $x = 2$. Brechen Sie nach dem 2. Iterationsschritt ab.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - \cos(x)$. Bestimmen Sie die Nullstelle im Intervall [0,1] mittels der Regula falsi auf drei Dezimalstellen genau.

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:

a) Unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten; nächstliegende und einfachste Möglichkeit:

$f(x) = x^2 - 2$

b) Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2} - \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{0{,}25}{3} = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{17}{12} - \frac{f\left(\frac{17}{12}\right)}{f'\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414$$

c) Regula-Falsi: $a_{n+1} = a_n - f(a_n) \cdot \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}$

$a_0 = 1,\ b_0 = 2 \to [1,2]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b-a_0}{f(b)-f(a_0)} = 1 - (-1) \cdot \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{4}{3} \to \left[\frac{4}{3}, 2\right]$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b-a_1}{f(b)-f(a_1)} = \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \frac{2-\frac{4}{3}}{2-\left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{7}{5} \to \left[\frac{7}{5}, 2\right]$$

$$a_3 = a_2 - f(a_2) \cdot \frac{b-a_2}{f(b)-f(a_2)} = \frac{7}{5} - \left(-\frac{1}{25}\right) \cdot \frac{2-\frac{7}{5}}{2-\left(-\frac{1}{25}\right)} = \frac{24}{17} \approx 1{,}412 \to [1{,}412, 2]$$

Aufgabe 2: Nullstelle von $f(x) \to f(x) = 0$ bzw. $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 3 = 0$

$a_0 = 1,\ b_0 = 2 \to [1,2]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b - a_0}{f(b) - f(a_0)} = 1 - (e^1 - 1 - 3) \cdot \frac{2-1}{(e^2 - \sqrt{2} - 3) - (e^1 - 1 - 3)}$$

$$\approx 1 - 1{,}28 \cdot \frac{1}{2{,}97 - 1{,}28} \approx 1{,}301 \to [1{,}301, 2]$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)} = 1{,}301 - \left(e^{1{,}301} - \sqrt{1{,}301} - 3\right) \cdot \frac{2 - 1{,}301}{(e^2 - \sqrt{2} - 3) - \left(e^{1{,}301} - \sqrt{1{,}301} - 3\right)}$$

$$\approx 1{,}301 - (-0{,}46) \cdot \frac{0{,}699}{2{,}97 - (-0{,}46)} \approx 1{,}395 \to [1{,}395, 2]$$

Aufgabe 3: Nullstelle von $f(x) \to f(x) = 0$ bzw $f(x) = x - \cos(x) = 0$

$a_0 = 0,\ b_0 = 1 \to [0,1]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b - a_0}{f(b) - f(a_0)} \approx 0 - (-1) \cdot \frac{1-0}{0{,}46 - (-1)} = \frac{1}{1{,}46} \approx 0{,}685$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)} \approx 0{,}685 - (-0.089) \cdot \frac{1 - 0{,}685}{0{,}46 - (-0{,}089)} \approx 0{,}718$$

$$a_3 = a_2 - f(a_2) \cdot \frac{b - a_2}{f(b) - f(a_2)} \approx 0{,}718 - (-0{,}035) \cdot \frac{1 - 0{,}718}{0{,}46 - 0{,}035} \approx 0{,}738$$

$$a_4 = a_3 - f(a_3) \cdot \frac{b - a_3}{f(b) - f(a_3)} \approx 0{,}738 - (-0{,}002) \cdot \frac{1 - 0{,}738}{0{,}46 - (-0{,}002)} \approx 0{,}739$$

Fixpunktiteration

1. Definition

Ein Fixpunkt ist ein Punkt der Koordinatenfläche, der durch eine gegebene Abbildung durch die Funktion $y = f(x)$ auf sich selbst abgebildet wird.
Ein Fixpunkt erfüllt die Gleichung $f(x) = x$.
Aufgrund dieser allgemeinen Definition kann man erkennen, dass ein Fixpunkt der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der ersten Winkelhalbierenden ist.

<u>Definition:</u>
Sei M eine Menge und $f: M \to M$ eine Funktion. Dann heißt ein Punkt $x \in M$ Fixpunkt, falls er die Gleichung $f(x) = x$ erfüllt.

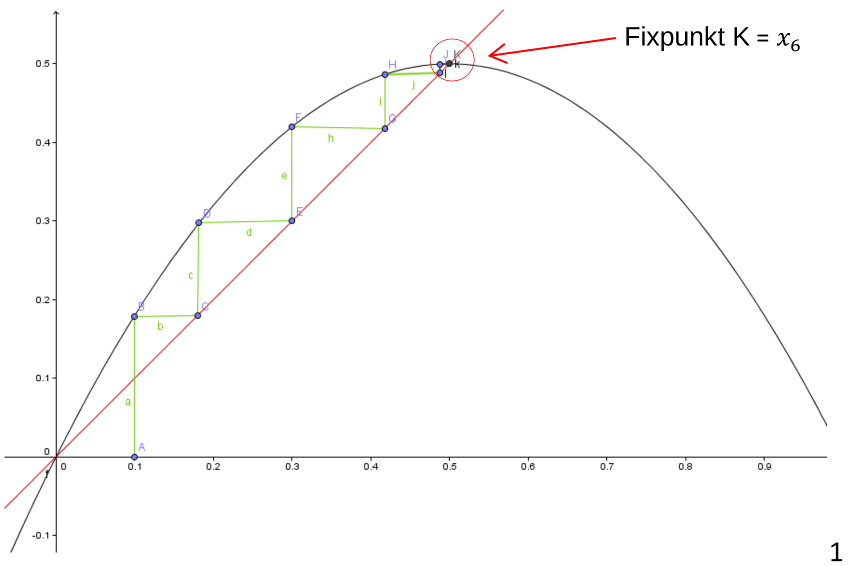
2. Fixpunktiteration

1. Die Gleichung muss zuerst in eine Fixpunktgleichung der Form $f(x) = x$ umgeformt werden.
2. Anschließend wählt man einen beliebigen Wert x_0 aus dem gegebenen Intervall bzw. ein Startwert x_0 ist vorgegeben.
3. Die Rechenfolge lautet:
   $x_1 = f(x_0)$
   $x_2 = f(x_{x1})$
   $x_3 = f(x_{x2})$
   ...
   $x_{k+1} = f(x_k)$

Unter geeigneten Voraussetzungen nähert sich die so erhaltene Folge einer Lösung von $f(x) = x$ immer weiter an.
Erhält man ein Ergebnis, das mit der Gleichung $x_{k+1} = f(x_k)$ übereinstimmt, so hat man den gesuchten Fixpunkt der Funktion gefunden.

3. Rechenbeispiel

I=[0,1;0,5]
$\mathrm{f(x)} = -2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$
→ $x = -2x^2 + 2x$
Startwert $x_0 = 0{,}1$
$f(0{,}1) = 0{,}18 \quad = x_1$
$f(0{,}18) = 0{,}295 \quad = x_2$
$f(0{,}295) = 0{,}416 \quad = x_3$
$f(0{,}416) = 0{,}486 \quad = x_4$
$f(0{,}486) = 0{,}499 \quad = x_5$
$f(0{,}499) = 0{,}499 \quad = x_6$



1 Didaktische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler sind bereits aus vorherigen Unterrichtseinheiten gewohnt, Funktionen auf bestimmte Stellen zu überprüfen. Nullstellen spielten dabei jeher eine entscheidende Rolle, sei es beispielsweise als signifikante Stelle, um ein Schaubild exakt zeichnen zu können oder als rechnerische Lösung bei der Differentialrechnung, um Extrem- oder Wendestellen zu bestimmen. Dass es für derartige Probleme nicht immer Verfahren oder Hilfsmittel wie den GTR gab, die die Bestimmung einer genaue Lösung ermöglichen, kann an dieser Stelle thematisiert und als historischer Einstieg genutzt werden. Rechnerisch erfolgt der Einstieg über einen Vergleich zwischen der, den Schülerinnen und Schülern aus der Mittelstufe bekannten, Intervallhalbierung und dem rechnerischen Vorgehen beim Newton-Verfahren, der bereits Effizienzvorteile der zu besprechenden Verfahren herausstellt. Die Fixpunktiteration dient im Anschluss als erstes Beispiel eines numerischen Verfahrens, das zunächst gemeinsam besprochen werden kann, um das Grundprinzip derartiger Verfahren kennenzulernen. Anschließend erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig anhand ausgehändigten Materials das Newton-Verfahren sowie die Regula Falsi. Warum es sich bei diesen beiden Verfahren trotz ihres primären Nutzens zur Bestimmung einer Nullstelle ebenfalls um Fixpunktverfahren handelt, es also einen Zusammenhang zwischen Fixpunkt- und Nullstellenbestimmung gibt, sollte, falls nicht bereits im Verlauf von Schülerseite angesprochen, spätestens am Ende thematisiert werden. Jeweilige Übungsaufgaben zu den Verfahren schließen die Thematik, wobei die letzte Aufgabe der Regula Falsi die Möglichkeit eröffnet, die betrachteten Näherungsverfahren mittels der Einstiegsfunktion nochmals untereinander zu vergleichen.

2 Methodische Hinweise

Um den Schülerinnen und Schülern die Ideen, die sich hinter den einzelnen Verfahren befinden, möglichst nachvollziehbar nahe zu bringen, empfiehlt sich zur Unterstützung der Einsatz geeigneter visueller Hilfsmittel.

3 Unterrichtsmaterialien

Arbeitsblatt 1: Einstieg

Arbeitsblatt 2: Arbeitsblatt Fixpunktiteration

Arbeitsblatt 3: Arbeitsblatt Newton-Verfahren

Arbeitsblatt 4: Übungsaufgaben Newton-Verfahren

Internetseite Informationen zur Regula Falsi:
http://gimmler.org/mediapool/20/205225/data/Regula_falsi.doc (Zugriff: 14.07.2015)

Arbeitsblatt 5: Übungsaufgaben Regula Falsi

4 Literaturhinweise

Dahmen, Wolfgang, Reusken Arnold: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Berlin 2008[2].

Deuflhard, Peter, Hohmann, Andreas: Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung, Berlin, New York 2002[3].

Niederdrenk, Klaus, Yserentat, Harry: Funktionen einer Veränderlichen. Analytische und numerische Behandlung, Braunschweig 1987.

Didaktische Hinweise

Die komplexen Zahlen haben keinen direkten Bezug zum Alltag. Dennoch ist die Einführung der komplexen Zahlen für die Schülerinnen und Schüler mehr als befriedigend, weil das für viele seltsame Verbot, aus negativen Zahlen die Wurzeln zu ziehen, durch eine Erweiterung des Zahlenraums aufgehoben wird. Im technischen Gymnasium können die Zeigerdiagramme in der Elektrotechnik auf Hochschulniveau neu betrachtet werden.
Für die Unterrichtseinheit der komplexen Zahlen gibt es schon einige Ausarbeitungen von ganzen Unterrichtseinheiten und weitere Dokumente, die für den Kurs Mathe+ hervorragend geeignet sind.
Der Film *Dimensions* lässt sich ebenfalls als Einstieg in die komplexen Zahlen verwenden, der gesamte Unterrichtsverlauf muss dann allerdings umgestellt werden, weil die Herangehensweise eher geometrisch ist.

Unterrichtsverlauf

Vorgeschlagener Unterrichtsverlauf

1) Motivation (z. B. Seite 1, 2 und 8 im Hainscho-Skript, Cardano) oder der erste Film, („Dimensions“, Kapitel 5) der unten in den Unterrichtsmaterialien erwähnten Filme ab 1:30 bis 5:55.
2) Begriffsklärung, Definition, Schreibweise a+ib
3) Grundlegende Rechenregeln, Film, Kapitel 5 von 5:56 - 9:40, Veranschaulichung der Addition und Subtraktion mit Vektoren
4) Betrag, Argument, Polarform, Film, Kapitel 5 ab 9:40
5) Umwandlung der Polar- in die Normalform
6) Interpretation der Multiplikation und Division mit Hilfe der Polarform
7) Eulersche Formel und Euleridentität
8) Komplexe Funktionen (z.B. Seite 20-21 im Hainscho-Skript) bzw. der erste Film (Kapitel 6)
9) Anwendung in der E-Technik
10) Mandelbrotmenge als wiederkehrende Iteration, Fraktale, Anwendung in Technik (Antenne, siehe Film 2) oder Filmen (Special Effects in Star Wars, siehe Film 2), Xaos

Methodische Hinweise

Die Unterrichtseinheit lässt sich mit den vorhandenen Materialien sehr gut komplett selbstorganisiert durchführen. Gerade für die Motivation der Unterrichtseinheit, für die komplexe Funktionen und die Anwendungen der komplexen Zahlen in der Technik bieten sich auch lehrerzentrierte Abschnitte an.

Fachliche Hinweise

Aufgrund der jeweiligen Vorteile bei der Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division/Potenzrechnung lohnt es sich, sowohl die Koordinatenform als auch die Polarform einzuführen und die jeweilige Umrechnung, z.B. über die trigonometrische Form zu besprechen.

Mit Hilfe der Komplexen Zahlen lassen sich trigonometrische Identitäten, wie z.B. sin(2x)=2*sin(x)*cos(x), die bisher als gegeben in Formelsammlungen standen, sehr einfach herleiten.

Die Eulersche Identität als „schönste Formel der Mathematik“ sollte im Rahmen der Unterrichtseinheit den ihr gebührenden Platz bekommen, wobei es fast egal ist, welche der Formen ($e^{2\pi i}=1$, $e^{2\pi i}-1=0$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\pi i}+1=0$) man verwendet.

Die komplexen Funktionen haben ihren Reiz in der Problematik, dass man eigentlich den R^4 zum Zeichnen benötigen würde. Mit den Schülerinnen und Schülern kann man sehr einfach überlegen, in wieweit der R^3 oder R^2 ebenfalls reichen würde, und darauf aufbauend Schaubilder erzeugen.

Die Mandelbrotmenge überzeugt aufgrund ihrer Schönheit und Selbstähnlichkeit und ermöglicht auf ästhetischem Weg einen sehr einfachen Zugang zu den komplexen Zahlen. Die erzeugende Folge ($z_{n+1}=z_n^2+c$, wobei $z_0=0$ für alle komplexen Zahlen c) ist einfach zu verstehen und zu berechnen. Xaos berechnet hier sehr schnell Bilder der Menge, für welche die Folge beschränkt bleibt.

Unterrichtsmaterialien

Digitale Werkzeuge, Videos, …..

Filme und Filmsequenzen:

Zwei größere Filmprojekte beschäftigen sich mit dem Thema komplexe Zahlen, wobei der Fokus beim zweiten Film vorrangig bei den Fraktalen als Anwendung liegt.

- "Dimensions by Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez",
  www.dimensions-math.org/
  Ist eine Homepage mit einer Sammlung von Filmen. Kapitel 5 und 6 des Film geben einen Überblick über komplexe Zahlen, der einen andersartigen Einstieg ermöglicht.
- *Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension,* (ARTE),
  Ein Film von Michael Schwarz und Bill Jersey, der seit 2008 dreimal bei ARTE lief. Teile des Films können im Unterricht ebenfalls gut verwendet werden. Hier ist der Abschnitt über Special Effects in Star Wars (ab 11:15 im zweiten Teil) und Antennen (ab 2:36 im dritten Teil) besonders interessant. Eine Suche nach dem Titel mit einschlägigen Suchmaschinen erleichtert das Auffinden.

Unterrichtseinheiten:

- Mag. Gerhard Hainscho: Workshop komplexe Zahlen, www.acdca.ac.at/material/kl7/7c_wshop.pdf
  Ein Workshop zu komplexen Zahlen von einem österreichischen Mathematiklehrer aus dem Jahr 2000. Teile des Workshops sind verwendbar obwohl die Programme auf den TI Voyage 200 oder TI 92+ zugeschnitten sind. Der TI nspire CAS nutzt dieselben Befehle, die Programme kann man jedoch nicht mehr verwenden. Interessant für Technische Gymnasien sind insbesondere die Seiten 12 und 13, weil hier eine Anwendung der komplexen Zahlen in der Elektrotechnik erklärt wird.
- „Mathematik kompakt für Ingenieure und Informatiker“ von Yvonne Stry und Rainer Schwenkert, ISBN: 978-3-642-24326-4 (Print) 978-3-642-24327-1 (Online) http://w3-o.cs.hm.edu/~rschwenk/buch.htm
  Zum Buch gibt es eine 96-seitige Foliensammlung, die das Thema umfassend abhandelt, inklusive dem Beispiel zur Elektrotechnik und den Fraktalen
- „Komplexe Zahlen (Leitprogramm)“ von Christina Diehl, Marcel Leupp, ETH Zürich www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/kz
  Ein sehr umfangreiches Skript über mehr als 100 Seiten mit sehr vielen Aufgaben, Kapiteltests und Lösungen.
  Ziel des Skripts ist, dass Schüler sich der Sek II die Grundlagen zum Themenbereich in 8-10 Schulstunden selbst erarbeiten.

Webseiten:

- www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html
- www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/analysis/complzahlen/index.html/
- www.komplexe-zahlen.de/

Programme:

- Xaos: Fraktalzeichner, http://matek.hu/xaos/doku.php

Arbeitsblätter mit Übungsaufgaben

Im Internet gibt es zahlreiche Übungsaufgaben, die Unterrichtende für ihre Schülerinnen und Schüler oder Studenten zum Thema komplexe Zahlen hochgeladen haben. Mit den richtigen Suchbegriffen wird man hier schnell fündig.

Aufgaben

Mögliche Klassenarbeitsaufgaben:

Aufgabe 1:

Die Gleichung $x^3-5x^2+9x=5$ besitzt im Komplexen die Lösungen $x_1=1$, $x_2=2-i$ und $x_3=2+i$.

a) Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass $x_2=2-i$ eine Lösung dieser Gleichung ist!
b) Wie geht x_3 aus x_2 hervor (soll heißen: In welcher Beziehung steht x_3 zu x_2)? Wie nennt man solche Zahlenpaare?
c) Berechnen Sie den Betrag von x_2 aus x_3!
d) Welche Lösungen besitzt die Gleichung im Reellen?

Aufgabe 2:

Gegeben sind folgende komplexe Zahlen:

$z_1=3+4i$ $z_2=$ $z_3=$ $z_4=$

a) Zeichnen Sie z_1 bis z_4 in der Gaussschen Zahlenebene ein! (Hinweise:)
b) Berechnen Sie
   I. z_1+z_2
   II. z_1*z_2
   III. z_3*z_4
   IV. z_2*z_3
   V. z_3/z_4

   und zeichnen Sie das Ergebnis ein!
c) Wandeln Sie z_2 in Polarform um! (Hinweise: siehe Tabelle rechts)

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	

d) Wandeln Sie z_3 in Koordinatenform um!
e) Erklären Sie, was Addition und Division komplexer Zahlen grafisch bedeutet!
f) Zeichnen Sie z_1 bis z_4 in der Gaussschen Zahlenebene ein! (Hinweise: $\sqrt{2} \approx 1{,}141$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)
g) Erklären Sie, wie man eine z_1 in Polarform umwandeln könnte!
h) Erklären Sie, was Addition und Division komplexer Zahlen grafisch bedeutet!

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie sin (2x) über den Umweg e^{i2x}

Oder

b) Berechnen Sie sin (2π/3) mit Hilfe der eulerschen Beziehung

Aufgabe 4:
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck in der Gaussschen Zahlenebene. Wenden Sie darauf die Funktionen

a) f(z)=z*i
b) f(z)=(z-1)*i+z

an.
Beschreiben Sie jeweils die Bewegung des Dreiecks.

Literaturhinweise und Quellen

www.dimensions-math.org/
www.youtube.com/watch?v=N4N4Fv5BMOA
www.acdca.ac.at/material/kl7/7c_wshop.pdf
http://w3-o.cs.hm.edu/~rschwenk/buch.htm
www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html
www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/ sek2/analysis/complzahlen/index.html/
www.komplexe-zahlen.de/
www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/kz
http://matek.hu/xaos/doku.php
www.welt.de/print-welt/article318333/Die-schoenste-Formel-der-Mathematik-wurde-im-18-Jahrhundert-in-Berlin-entdeckt.html

Spieltheorie:

Einstieg: Schere, Stein, Papier (vgl. Libreoffice Simulation)
Hinzufügen des Symbols „Brunnen“ ➔ Dominierte Strategie / Dominante Strategie
Gleichgewicht in reinen Strategien, Nash-Gleichgewicht
Gleichgewicht in gemischten Strategien

Links:
www.spieltheorie.de/
www.gerdbreitenbach.de/ → European Talent Academy → The Mathematics of games

Didaktische Hinweise

Die Kryptologie ist sicher einer der Bereiche der Mathematik und Informatik, der am nächsten am Alltag liegt und auch am motivierendsten für die Schülerinnen und Schüler sein kann. Gleichzeitig ist die Wissenschaft der Verschlüsselung aufgrund ihrer über 2000 Jahre alten Geschichte so vielfältig, dass eine Wahl des genauen Themas schon zur Herausforderung wird. Die Komplexität wächst von monoalphabetischen Verschlüsselungen in der Antike (Caesar-Chiffre) über polyalphabetischen Verschlüsselungen (Vigenère-Verschlüsselung) im 16. Jahrhundert bis hin zu asymmetrischen Verschlüsselungen (RSA) im 20. Jahrhundert. Kryptographie ist heute in höchstem Maße alltagsrelevant, von der Sicherheit von Kommunikationsformen (Chats, Telefonate, Dateiverschlüsselung, Logins, online-Banking) bis hin zu Restriktionen durch Ländercodes oder dem Kopierschutz von DVDs.
Die Frage ist nun, wie tief man in die Thematik einsteigen will und wieviel Zeit man investieren will.
Historisch lassen sich von Maria Stuart (Babington-Komplott) über den Wilden Westen (Beale-Chiffre) bis hin zum ersten und zweiten Weltkrieg (Enigma, Bletchley-Park) zahlreiche historisch interessante Geschichten in der Kryptologie finden.
Auch die Einschätzung, dass die Zahlentheorie als Teilbereich der Mathematik zwar nett ist, aber keine praktische Relevanz besitzt (Hardy), kann für Schülerinnen und Schüler motivierend sein, sich mit Mathematik zu befassen.
Die Kryptoanalyse spricht Schülerinnen und Schüler besonders an, weil hier die Möglichkeit besteht, Geheimnisse zu knacken. Mit Computerprogrammen lassen sich hier die Grenzen der klassischen mono- und polyalphabetischen Verfahren gut aufzeigen. Am Beispiel des Voynich-Manuskript oder der Skulptur Kryptos vor dem Hauptquartier der CIA kann man einen schnellen Blick auf noch ungeknackte Rätsel werfen

Das Geheimnisteilen von Shamir ist ein interessantes Beispiel, wie man ganzrationale Funktionen n-ten Grades nutzen kann, um Informationen zu verteilen. Ein Arbeitsblatt und Aufgaben hierzu finden sich weiter unten.

Weiterführende Literatur:
http://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Kryptographie
www.spiegel.de/wissenschaft/technik/code-raetsel-krypto-kuenstler-gibt-hinweis-auf-cia-geheimnis-a-730308.html
http://scienceblogs.de/klausis-krypto-kolumne/2013/10/13/top-25-der-ungeloesten-verschluesselungen-platz-1-bis-25-im-schnelldurchlauf/
https://de.wikipedia.org/wiki/Beale-Chiffre

Unterrichtsverlauf

Ein Unterrichtsverlauf soll hier nicht vorgegeben werden, weil dieser entsprechend der gewählten Schwierigkeit unterschiedlich aussehen kann.

Es erscheint jedoch sinnvoll, am Ende über Restklassenrechnen, Faktorisierung von großen Zahlen und den Kleinen Satz von Fermat auf das asymmetrische Verfahren von Rivest-Shamir-Adelman (RSA) zu kommen.

Methodische Hinweise

Teile der Unterrichtseinheit können sicher selbstorganisiert durchgeführt werden, für die Einführung in Restklassenrechnen, Faktorisierung und den Kleinen Satz von Fermat wird eine eher lehrerzentrierte Form empfohlen.

Fachliche Hinweise

keine

Unterrichtsmaterialien

Digitale Werkzeuge, Videos, …..

<u>Filme und Filmsequenzen:</u>

Enigma – Das Geheimnis, 2001

Verschlüsseln - Damit geheime Daten geheim bleiben, von Informatik Biber, www.youtube.com/watch?v=ONVkrL7heRw

<u>Unterrichtseinheiten:</u>

Unter www.cryptoportal.org/ sind zahlreiche Unterrichtseinheiten zum Thema Kryptographie gesammelt.

Bei Matheprisma sind drei Selbstlerneinheiten vorhanden.

www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Caesar/ Cäsar

www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/RSA/ RSA

www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/DES/ DES

Webseiten:

Unter www.cryptool.org/de/ ist einen der größten Sammlungen zum Thema, unter anderem sind hier zwei Lernprogramme. Die Webseite ist aus einem Projekt einer großen Bank entstanden, die ihre Mitarbeiter sensibilisieren wollte.

Im Internet gibt es eine riesige Anzahl an Seiten, die zum Thema passen. Eine Linksammlung ist z.B. unter http://wikis.zum.de/zum/Kryptographie zu finden.

Unter www.ziegenbalg.ph-karlsruhe.de/materialien-homepage-jzbg/cc-interaktiv/index.htm ist eine Sammlung von Beiträgen zur Thematik, die im Rahmen einer Vorlesung an der PH Karlsruhe erstellt wurde.

Programme:

Cryptool: Open-Source-Programm für Windows, das Möglichkeiten zur Kryptographie und Kryptoanalyse bietet. Das Programm beinhaltet einen E-Learning-Anteil. Download unter www.cryptool.org/de/ct1-download

Arbeitsblätter mit Beispielen
Shamir-Polynome

„Unter *Secret Sharing* versteht man ein Verfahren, eine geheime Information *S* auf *n* Teilnehmer aufzuteilen, so dass das Geheimnis *S* nur durch die Zusammenarbeit von hierfür qualifizierten Gruppen der Teilnehmer rekonstruiert werden kann. Wenn darüber hinaus gewährleistet ist, das eine nicht-qualifizierte Gruppe *keinerlei*, nicht einmal stochastische, Information über *S* erhält, so bezeichnet man das Verfahren als *perfekt*.
Eine weitergehende Forderung ist die *Robustheit* des Verfahrens. Hierbei wird verlangt, dass das Verfahren auch dann noch sicher bleibt, wenn sich einzelne Teilnehmer unehrlich verhalten, indem sie etwa Informationen zurückhalten oder verfälschen.
Die grundlegende Aufgabe von Secret Sharing besteht in der sicheren Aufbewahrung der durch kryptographische Verfahren angefallenen geheimzuhaltenden Schlüssel. Diese Verfahren sind mittlerweile derart ausgefeilt, dass es ohne den passenden Schlüssel nicht möglich ist, eine verschlüsselte Datei nutzbar zu machen, obwohl die verwendeten Algorithmen allgemein bekannt sind. Auch wenn dies natürlich gerade der Sinn einer Verschlüsselung ist, entsteht ein gewaltiges Problem im Verlustfalle des Schlüssels, was z.B. durch das Abhandenkommen eines Datenträgers leicht geschehen kann.
Daher ist man versucht, den Schlüssel auf mehrere Personen oder Orte zu verteilen, so dass einerseits eine gewisse Anzahl dieser Archive benötigt werden (Schutz gegen unbefugten Zugriff), aber andererseits auch nicht alle (Schutz gegen Datenverlust).
Eine andere in der Literatur häufig genannte Anwendung ist die Authentifikation wichtiger Dokumente für ein Unternehmen, z.B. von Schecks. Hierbei kommen Verfahren zur digitalen Signatur zum Einsatz, die ebenfalls auf Schlüsseln basieren. Ein Unternehmen kann etwa daran interessiert sein, dass nur Manager von ausreichendem Rang und Anzahl gewisse digitale Unterschriften leisten können.
Nicht zuletzt gibt es militärische Anwendungen. Eine Atommacht wird sicher sorgfältig darauf achten, dass die Aktivierungssequenzen ihrer Raketenbasen nur dann eingeleitet werden können, wenn kein Zweifel über die Autorität des Initiators und die Authentizität der diesbezüglichen Befehle herrscht.“

Quelle: Thilo Planz: www.informatik.tu-darmstadt.de/BS/Lehre/Sem98_99/T12/secret_sharing.htm

Zehn Geheimnisträger arbeiten an einem geheimen Projekt. Die Informationen sind nur zugänglich, wenn mindestens sechs beliebige Geheimnisträger bzw. ihre Schlüssel vorhanden sind.

Als Modell hierfür dienen ganzrationale Funktionen. Besitzt man n Punkte Pi(xi|yi), so kann man genau eine ganzrationale Funktion (n-1)-ten Grades durch diese Punkte legen, mit (n-1) Punkten geht dies nicht.

Konkret:

Ein Geheimnis wird mit einer ganzr. Funktion 3. Grades verschlüsselt. Die vier anwesenden Geheimnisträger besitzen die Schlüssel P(-1|64), Q(1|2762), R(2|11387) und S(-2|-2857).

Für f(x) gilt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Weiterhin gilt:

Das Problem ist also ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten. Wenn nur 3 Geheimnisträger anwesend wären, wäre das Gleichungssystem nicht zu lösen. Die Lösung laute a=716, b=972, c=697, d=377

Für f(x) gilt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Weiterhin gilt:

$$\begin{cases} f(-1) = 64 \\ f(1) = 2762 \\ f(2) = 11387 \\ f(-2) = -2857 \end{cases}$$

Der Zugangsschlüssel zum (mathematischen) Schloss ist also die Funktion

$f(x) = 716x^3 + 972x^2 + 697x + 377$ oder 71 69 72 69 73 77 oder _____________

Aufgaben:

1) Bestätige, dass das Geheimwort SCHWER lautet, d. h. finde das Polynom zu Q1(-1|42), Q2(1|3466), Q3(0|982) und Q4(-2|-4370) und übersetze die Koeffizienten!

2) Finde das Polynom zu Q1(2|6449), Q2(-1|-382), Q3(-2|-3771) und Q4(0|663). Die Lösung ist die Fortsetzung aus 1)

3) (Partnerarbeit) Verschlüssele ein Wort/einen Text von mindestens 7 Zeichen zu einem Polynom 4. Grades, berechne 5 Schlüssel und lass deinen linken Nachbarn entschlüsseln. Hast du keinen linken Nachbarn, gib deine Aufgabe dem, der ganz rechts in deiner Reihe sitzt.

4) (Bonusaufgabe, für eine sehr gute zusätzliche Note) Schreibe ein Programm mit dem TI-92+, das Texte in Polynome und Punkte umwandelt bzw. umgekehrt.

ASCII-Zeichensatz

ASCII-Zeichensatz

65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
32	33	34	40	41	44	46	48	49	......	56	57	63
	!	"	(	)	,	.	0	1	......	8	9	?

Weiterführende Literatur:

www.informatik.tu-darmstadt.de/BS/Lehre/Sem98_99/T12/secret_sharing.htm
www.zenger.informatik.tu-muenchen.de/lehre/vorlesungen/konkr_math/02_03/prog/BlattPA2.pdf
Horak, Müller: Mathematik 11, BSV München, 3. Auflage

Aufgaben

Mögliche Klassenarbeitsaufgaben:

1. Erläutere die Funktionsweise des Geheimnisteilens mit Shamir-Polynomen.
2. Gegeben sind folgende Punkte: P(-3|6248), Q(-2|-2070), R(-1|-6822), S(2|738). Wie lautet die Botschaft/das Geheimwort?

ASCII-Zeichensatz

65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
32	33	34	40	41	44	46	48	49	……	56	57	63
	!	"	(	)	,	.	0	1	……	8	9	?

Weiterführende Literatur

Bücher:

- Borys, Thomas: Codierung und Kryptologie, Vieweg+Teubner Research, 2011
- Simon Singh: Geheime Botschaften, dtv, 2001
- Barnett, I.A.: Some ideas about number theory. National Council of teachers of mathematics, Washington DC, 1972
- Beutelspacher, A.: Kryptologie. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987
- Beutelspacher; Schwenk; Wolfenstetter: Moderne Verfahren der Kryptographie. Vieweg, Braunschweig, 1998
- Beutelspacher, A.: In Mathe war ich immer schlecht. Vieweg, Braunschweig, 1996
- Conway, John H.: Über Zahlen und Spiele. Vieweg, Braunschweig, 1983
- Conway, John H.; Guy, Richard K.: Zahlenzauber. Birkhäuser Verlag, Basel, Berlin, Boston, 1997
- Endres; Schimmel: Das Mysterium der Zahl. Diederichs Verlag, München, 1992
- Enzensberger, Hans Magnus: Der Zahlenteufel. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1997
- Freund, H.: Elemente der Zahlentheorie. B.G. Teubner, Stuttgart, 1979
- Gallin, Peter (Hrsg.): 101 Mathematikaufgaben. Aulis Verlag Deubner, Köln, 1997
- Kalouinine, L.A.: Primzahlzerlegungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971
- Kempermann, T.: Zahlentheoretische Kostproben. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1995
- Konforowitsch, A.G.: Logischen Katastrophen auf der Spur. Fachbuchverlag Leipzig, 1990

- Kracke, Helmut: Mathe-musischen Knobelisken. Dümmler, Bonn, 1992
- Kranzer, Walter: So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1989
- Niven; Zuckerman: Einführung in die Zahlentheorie I. BI - Wissenschaftsverlag, 1991
- Padberg, Friedhelm: Didaktik der elementaren Zahlentheorie. Herder, Freiburg, 1981
- Pieper, H.: Zahlen aus Primzahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974
- Schräder, Wilhelm: Einführung in die Zahlentheorie. Pädagogischer Verlag Schwann, Düsseldorf , 1973
- Schwarz, Friedrich: Einführung in die Elementare Zahlentheorie. B.G. Teubner, Stuttgart, 1998
- Singh, Simon: Fermat's Last Theorem. 4th, 1998
- Wells, David: Das Lexikon der Zahlen. Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main, 1991
- Worobjow, N.N.: Die Fibonacci Zahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971

Zeitschriften:

- Burau, Werner: Elementare Zahlentheorie. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1970
- Batzer, Peter: Die Enigma. LOGIN-Verlag, Berlin, 1996
- Becker, Klaus-Ch.; Beutelspacher, A.: Datenverschlüsselung. LOGIN-Verlag, Berlin, 1996
- Beutelspacher, A.: Kryptographie - eine Einführung in die Wissenschaft von der Geheimhaltung der Daten: Codieren und Chiffrieren. MU Der Mathematikunterricht, Friedrich Verlag, Mai 1987
- Glatfeld, Martin: Konzeptionelle Bemerkung zur unterrichtlichen Behandlung von Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge. Mathematik Lehren: Primzahlen I: Friedrich Verlag, Heft 57, April 1993b
- Glatfeld, Martin: Über die Verteilung der Primzahlen. Mathematik Lehren: Primzahlen II, Friedrich Verlag, Heft 61, April 1993
- Gorini, Catherine A. : Using Clock Arithmetic to Send Secret Messages. The Mathematic Teacher, Vol 89, No 2, Feb. 1996
- Herget, W.: Artikelnummern und Zebrastreifen, ... ISTRON 3,
- Michl, Martin: So funktioniert Verschlüsselung. CHIP 9/98, Vogel Verlag Würzburg, 1998

- Müller, Horst: Aufgaben über und um Primzahlen. Mathematik Lehren: Primzahlen I: Friedrich Verlag, Heft 57, April 1993
- Ribenboim, Paulo: Primzahlrekorde. Didaktik der Mathematik, Heft 1, 1993
- Scheu, G.: Endeckungen in der Menge der Primzahlen mit DERIVE. Praxis der Mathematik, 3/34, 1992
- Schmundt, Hilmar: Die Macht der Zahlen. konr@d, Gruner + Jahr AG & Co, 1999
- Schubert, Sigrid: Basismechanismen der Informationssicherheit. LOGIN-Verlag, Berlin, 1996
- Schulz, Ralph-Hardo : Primfaktorzerlegung. LOGIN-Verlag, Berlin, 1996
- Schulz, Ralph-Hardo : Primzahlen in öffentlichen Chiffrierverfahren. Mathematik Lehren: Primzahlen II, Friedrich Verlag, Heft 61, April 1993
- Siegler, H.; König, G.: Kleines Primzahllexikon. Mathematik Lehren: Primzahlen II, Friedrich Verlag, Heft 57, April 1993
- Sommer, Heike: Zahlentheorie in der Schule?. Praxis der Mathematik, August 1998
- Wallasch, Joachim M.: Elementare Beweise einiger zahlentheoretischer Sätze von Pierre Fermat. Praxis der Mathematik, 1/34, 1992
- Wallasch, Joachim M.: Die Pellsche Gleichung. Praxis der Mathematik, 3/35, 1993
- Witten; Letzner; Schulz: RSA & Co in der Schule. LOGIN-Verlag, Berlin, 1998
- Zita, K.: Kleiner Beitrag zum Palindrom-Problem. Praxis der Mathematik, 3/36, 1994

Didaktische Hinweise

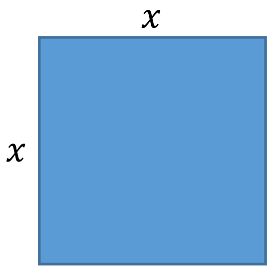
Die Struktur der Handreichung weicht von der des Lehrplans ab. Grundsätzlich folgt der Aufbau einer zunehmenden Komplexität, zum anderen werden Sachzusammenhänge berücksichtigt.

Zunächst wird die Wurzelfunktion behandelt, da die Schülerinnen und Schüler über entsprechende Primärstrukturen verfügen.
Durch die abschnittsweise definierte Funktionen lernen die Schülerinnen und Schüler eine neue Schreibweise und die Zusammensetzung bekannter Funktionstypen zu einer neuen Funktionsklasse kennen.

Gebrochenrationale Funktionen sind die Fortführung der Potenzfunktionen mit negativem Exponenten. Durch ihre Polstellen, Definitionslücken, Asymptoten bieten sie den Schülerinnen und Schülern viele neue Aspekte. Im Rahmen der Handreichung werden zunächst die allgemeinen Funktionseigenschaften thematisiert. Zur Betrachtung der Differentialrechnung müssen zunächst die Ketten- und Quotientenregel eingeführt werden, bevor man konkrete Kurvendiskussion bei gebrochenrationalen Funktionen betreiben kann.

Bei der Tangensfunktion finden die Schülerinnen und Schüler Polstellen und Definitionslücken, die von den gebrochenrationalen Funktionen bereits bekannt sind. Die Ableitung der Tangensfunktion benötigt zudem die zuvor eingeführte Quotientenregel.

Die Logarithmusfunktionen weisen einen hohen Schwierigkeitsgrad auf und sind für Schülerinnen und Schüler am abstraktesten, da sie außer als Umkehrung der Exponentialfunktion keine sonstigen thematischen Anknüpfungspunkte bieten.



f ist die Funktion, die den Flächeninhalt des Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge x angibt. Der Funktionsterm von f ist ______________.
Bestimmen wir den Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f .

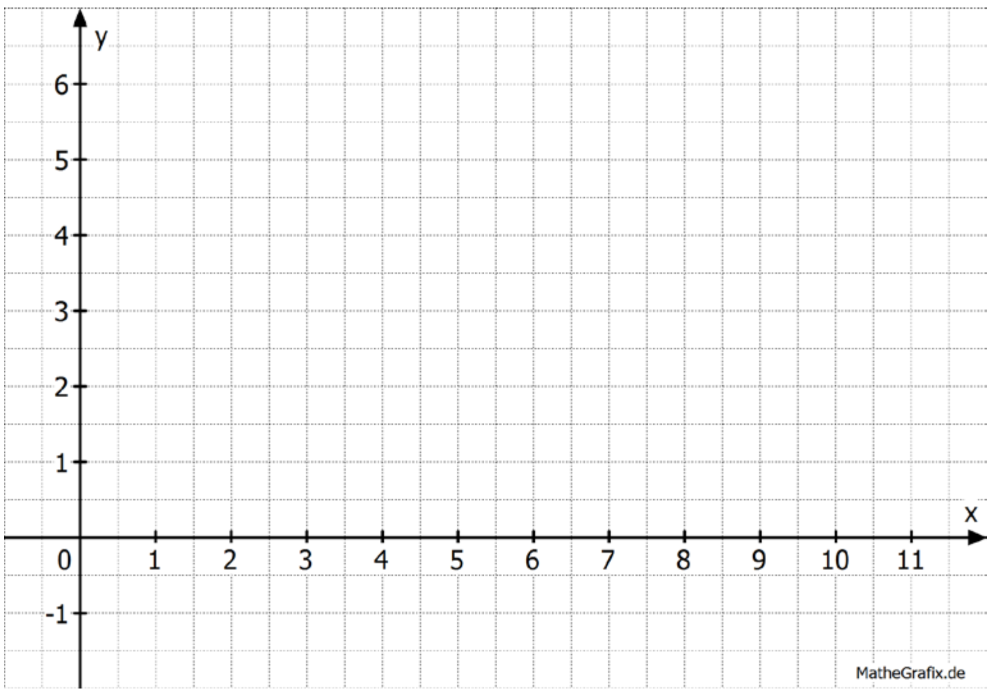
Wir setzen $f(x) = y$ und lösen die Gleichung nach x auf.

Wir vertauschen x und y und setzen dann $y = f^{-1}(x)$. So erhalten wir die **Umkehrfunktion** f^{-1} unserer ursprünglichen Funktion.

Bestimmen wir nun den Definitionsbereich sowie den Wertebereich der Umkehrfunktion.

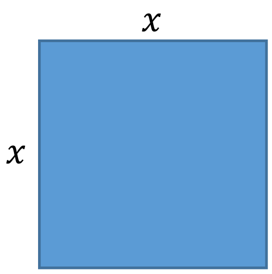
Betrachten wir das Schaubild der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$.

x	0	1	2	3	4	6,25	9
$f(x)$							



Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 7,5 FE hat eine Kantenlänge von ca. _______ LE.

Lösung



f ist die Funktion, die den Flächeninhalt des Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge x angibt. Der Funktionsterm von f ist $f(x) = x^2$.
Bestimmen wir den Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f .
$D = \mathbb{R}_+ \,, da\ es\ keine\ negative\ Kantenlänge\ gibt.\quad W = \mathbb{R}_+$.
Wir setzen $f(x) = y$ und lösen die Gleichung nach x auf.

$$y = x^2$$

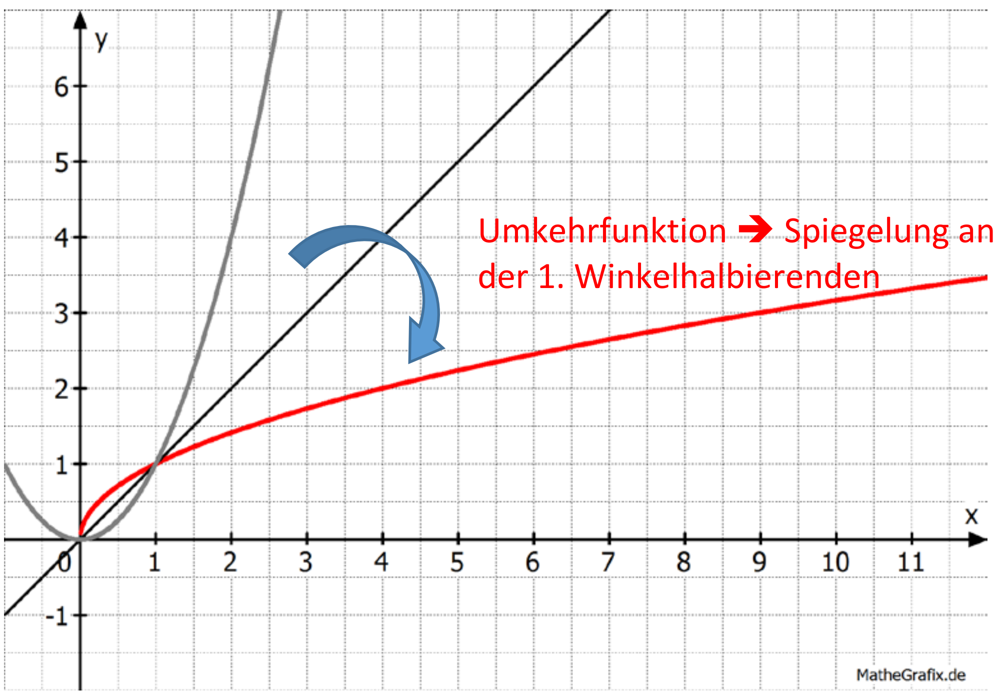
$\sqrt{y} = x$, nur positive Lösung, da x positiv

Wir vertauschen x und y und setzen dann $y = f^{-1}(x)$. So erhalten wir die **Umkehrfunktion** f^{-1} unserer ursprünglichen Funktion.

$$y = \sqrt{x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Bestimmen wir nun den Definitionsbereich sowie den Wertebereich der Umkehrfunktion.
$D = \mathbb{R}_+$ Die Quadratwurzel lässt sich nur von positiven Werten ziehen (zuvor Wertebereich).
$W = \mathbb{R}_+$ nur positive Kantenlängen sind gesucht (zuvor Definitionsbereich).
Betrachten wir das Schaubild der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$.

x	0	1	2	3	4	6,25	9
$f(x)$	0	1	1,4142…	1,732…	2	1,5	3



Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 7,5 FE hat eine Kantenlänge von ca. 2,74 LE.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion und den Definitionsbereich.
   a. $f(x) = -3(x+1)^2 + 6$
   b. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
   Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und begründen Sie, dass sich ein Halbkreis ergibt, also eine Figur, deren Punkte alle den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben.
3. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}\,,\ x \geq 1$ der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5\,,\ x \leq 2$
   c. indem Sie beschreiben, wie das Schaubild von f^{-1} durch Verschiebungen und Streckungen aus dem Schaubild der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ hervorgeht.
   d. durch Spiegelung des Schaubilds von f an der ersten Winkelhalbierenden.
4. K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{5 + x^2} - 6$.
   e. Geben Sie den Definitionsbereich an und untersuchen Sie K auf Achsenschnittpunkte.
   f. Die Tangenten und Normalen an den Nullstellen begrenzen ein Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Lösungen Aufgaben

1.

a. $y = -3(x+1)^2 + 6 \Leftrightarrow y - 6 = -3(x+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}y + 2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2 - \frac{1}{3}y} = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2 - \frac{1}{3}y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{3}x} - 1$; $\mathbb{D} =]-\infty; 6]$

b. $y = 2x^2 - 8x + 7 \Leftrightarrow y = 2(x-2)^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} = x - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} + 2$; $\mathbb{D} = [-1; \infty[$

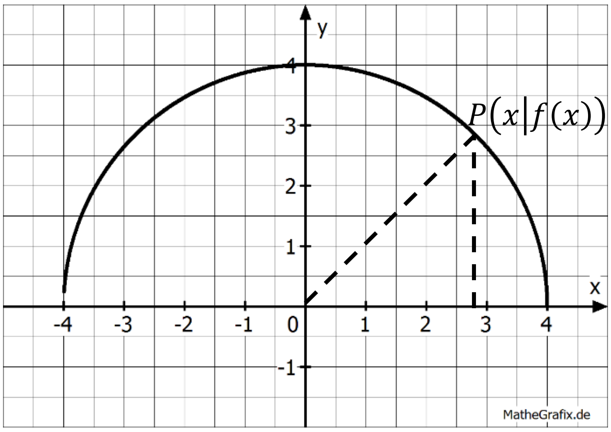
2. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ $\mathbb{D} = [-4; 4]$

Abstand mit dem Satz von Pythagoras

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2}$

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2}$

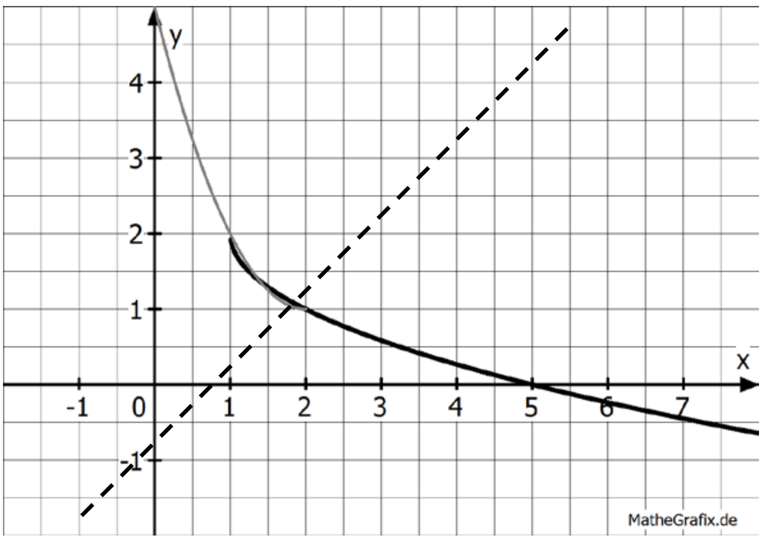
$\overline{OP} = \sqrt{16} = 4$



3.

a. Das Schaubild von f^{-1} entsteht aus $y = \sqrt{x}$ durch Spiegelung an der x-Achse, Verschiebungen um eine Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben.

b. $f(x) = (x-2)^2 + 1$, $x \leq 2$



4. K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{5+x^2} - 6$.

   a. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, da $5 + x^2 \geq 0$ für jedes x

   $f(0) = 2\sqrt{5} - 6 \approx -1{,}53 \quad S_y(0|-1{,}52)$

   $f(x) = 0 \iff 2\sqrt{5+x^2} - 6 = 0 \iff \sqrt{5+x^2} = 3$

   $\implies 5 + x^2 = 9 \iff x^2 = 4 \iff x_{1/2} = \pm 2 \quad N_1(-2|0)\ N_2(2|0)$

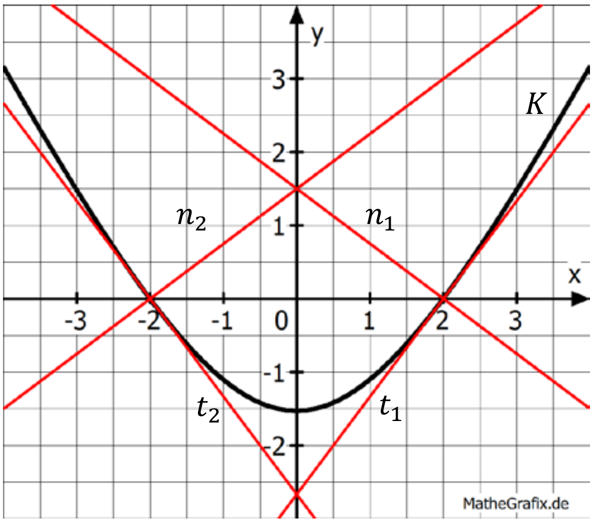
   b. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{5+x^2}}$

   $f'(2) = \frac{4}{3} \qquad f'(-2) = -\frac{4}{3}$

   $t_1: y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \quad n_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

   $t_2: y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \qquad n_2: y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

   $A = 4 \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{50}{3} \approx 16{,}67\ FE$

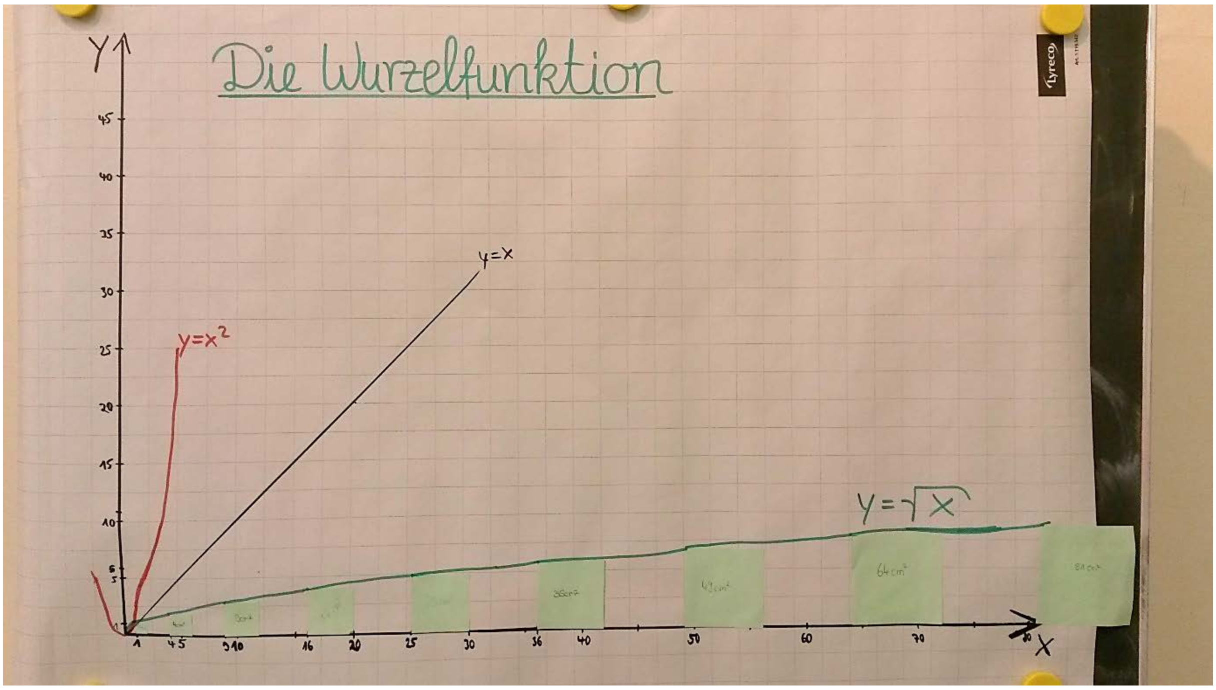


1 Didaktische Hinweise

Die Einführung der Wurzelfunktion erfolgt als Umkehrfunktion der Normalparabel. Die umgekehrte Sichtweise „Wie erhält man die Seitenkante eines Quadrats bei gegebenem Flächeninhalt?“ lässt sich für Schülerinnen und Schüler gut veranschaulichen. Sie erkennen, dass man die Umkehrfunktion grafisch als Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden bestimmt.
Den Definitionsbereich der Wurzelfunktion leiten sie aus dem Wertebereich ab. Mit vorgegebenen Wurzelfunktionen und Schaubildern erkennen Schülerinnen und Schüler durch Zuordnen, dass die bekannten Abbildungen auch auf Wurzelfunktionen übertragbar sind.
Bei der rechnerischen Bestimmung der Umkehrfunktion aus einer quadratischen Funktion erhält die Scheitelform wieder an Bedeutung. Die Umformung mit quadratischer Ergänzung ist evtl. nicht allen Schülerinnen und Schülern bekannt und muss ggf. besprochen werden.
Auch eine Aufgabe aus der Differentialrechnung wird bearbeitet. Die Ableitung der Wurzelfunktion erfolgt mit der Potenz- und Kettenregel, indem die Wurzel als Exponent geschrieben wird.

2 Methodische Hinweise

Als Einstieg schneiden die Schülerinnen und Schüler Quadrate mit verschiedenen Seitenkanten aus Papier aus und schreiben den entsprechenden Flächeninhalt darauf. Diese Quadrate werden auf ein Plakat in ein Koordinatensystem so geklebt, dass die Unterkante auf der x-Achse liegt und die linke Seitenkante an den x-Wert gelegt wird, der dem Flächeninhalt entspricht. Durch die Verbindung der linken oberen Eckpunkte der Quadrate entsteht das Schaubild der Wurzelfunktion. Hier setzt dann die Diskussion ein, was das für ein Schaubild sein könnte.

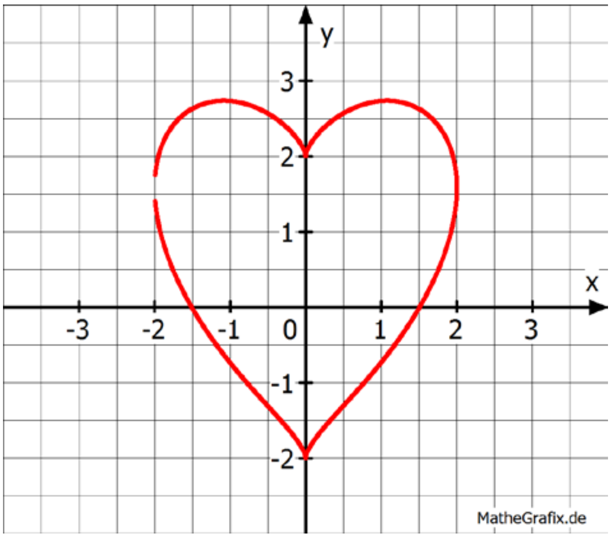


Alle Erkenntnisse werden anschließend auf dem Arbeitsblatt festgehalten und der Begriff der Umkehrfunktion eingeführt.
Das Domino spielen die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit. Hier können sie bereits Bekanntes übertragen und durch Ausprobieren die richtigen Lösungen herausfinden.
Das zweite Arbeitsblatt enthält Aufgaben zur Vertiefung von Wurzelfunktionen, die rechnerisch und grafisch zu lösen sind. Außerdem gibt es eine Aufgabe aus der Differentialrechnung.

3 Fachliche Hinweise

Die Wurzelfunktionen werden hier nur als Umkehrfunktionen von quadratischen Funktionen durchgenommen. Denkbar wären auch Umkehrfunktionen von Funktionen höheren Grades. Auf diese wird jedoch wegen des Umfangs verzichtet.
Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung werden Halbkreise als Schaubilder von Wurzelfunktionen auch betrachtet.
An dieser Stelle kann auch die „Herz-Formel“ gezeigt werden, welche die Schülerinnen und Schüler gern sehen. Für die Darstellung des Schaubildes in Herzform eignen sich digitale Mathematikwerkzeuge.

Herz-Formel z.B.
$y = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt[3]{x^2}$ und $y = -\sqrt{4 - x^2} + \sqrt[3]{x^2}$

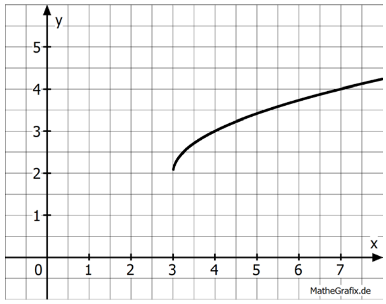


4 Unterrichtsmaterialien

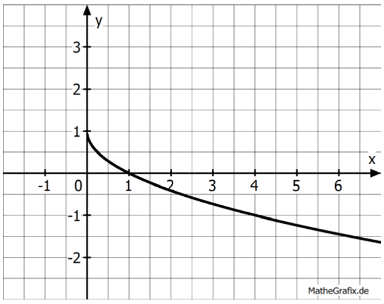
Arbeitsblatt zur Einführung von Wurzelfunktionen und Übungsaufgaben
Domino-Spiel zur Zuordnung von Schaubildern und Wurzelfunktionen

Start

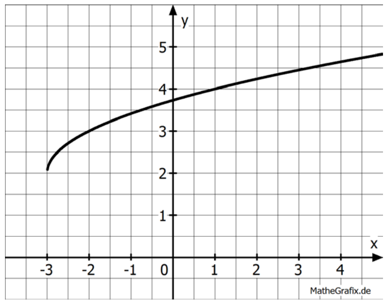
$f(x) = \sqrt{x-3} + 2$



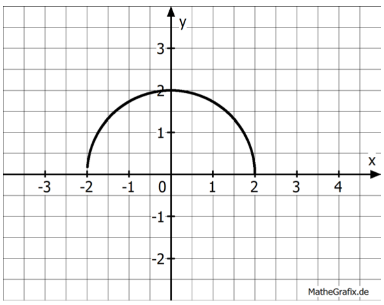
$f(x) = -\sqrt{x} + 1$



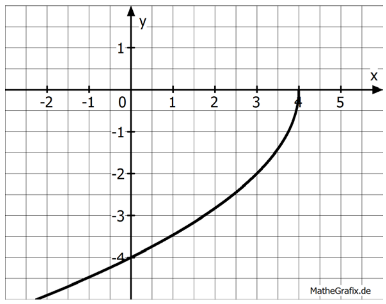
$f(x) = \sqrt{x+3} + 2$



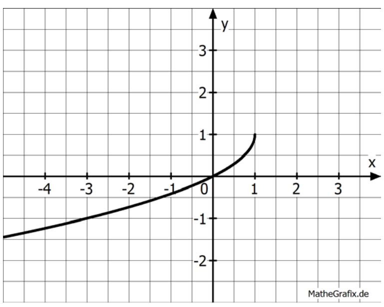
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



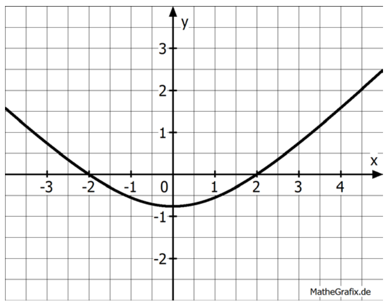
$f(x) = -2\sqrt{4 - x}$



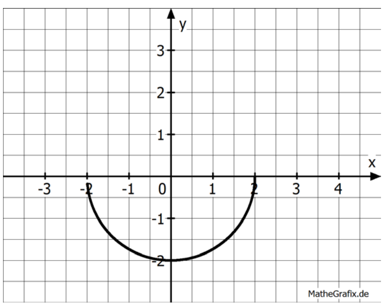
$f(x) = -\sqrt{1 - x} + 1$



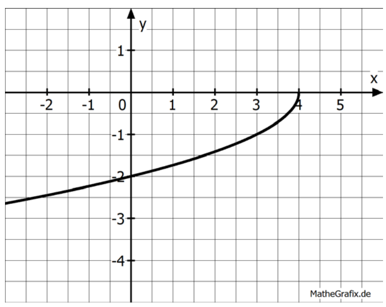
$f(x) = \sqrt{5 + x^2} - 3$



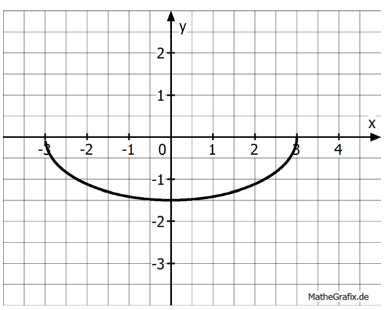
$f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$



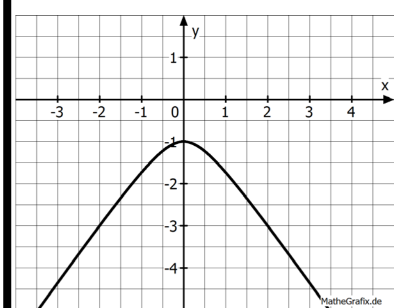
$f(x) = -\sqrt{4 - x}$



$f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$



$f(x) = -\sqrt{1 + 2x^2}$

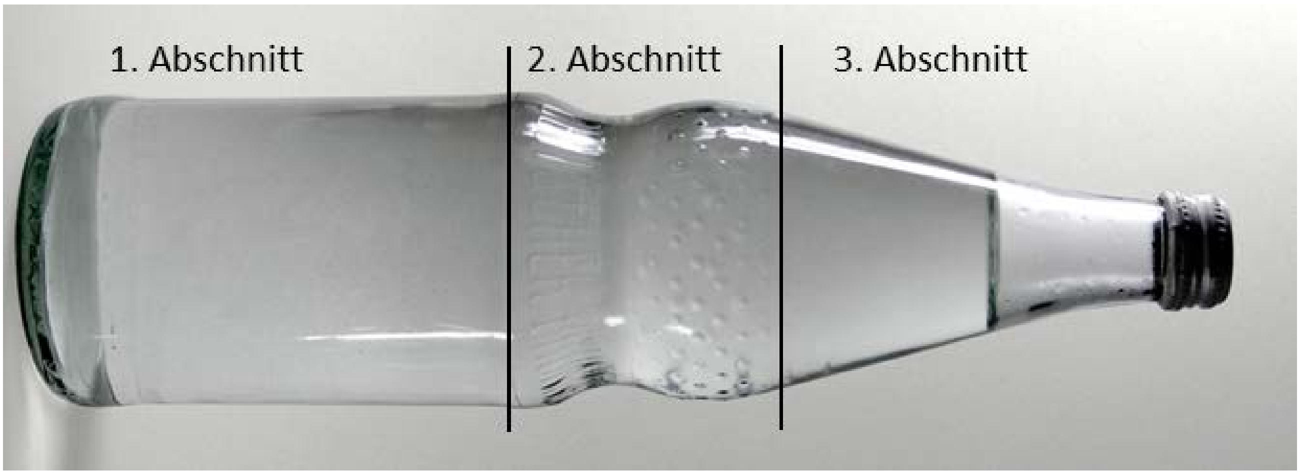


Ende

Abschnittsweise definierte Funktion

Beispiel: Die Randlinie einer typischen Glaspfandflasche soll modelliert werden. In den drei Abschnitten sollen folgende unterschiedliche Funktionstypen verwendet werden:

1. Abschnitt: konstante Funktion
2. Abschnitt: geeignete Polynomfunktion
3. Abschnitt: lineare Funktion



Hinweise:
Legen Sie fest, wo die Koordinatenachsen verlaufen sollen.
Messen Sie mit den ausgeteilten Schnüren den Umfang der Flasche an verschiedenen Stellen.
Geben Sie für den jeweiligen Abschnitt einen Funktionsterm an. Beachten Sie dabei, dass die Flasche keine „Löcher“ hat.

Die Randlinie kann auch wie folgt durch eine abschnittsweise definierte Funktion ausgedrückt werden:

$$f(x)=\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Lösungsidee:

Messwerte:

x	0-12	13	14	15	16	17	18	19	26
Umfang in cm	24	23,5	21,5	23	23,5	23	22	19,6	8,5
Radius r in cm	3,82	3,74	3,42	3,66	3,74	3,66	3,5	3,12	1,35

1. Abschnitt: $f_1(x)=3{,}82$
2. Abschnitt: z.B. Kubische Regression für Messwerte von $x=12$ bis $x=19$.
   $f_2(x)=-0{,}0142x^3+0{,}6455x^2-9{,}7141x+51{,}99$ mit $R^2=0{,}88$
   $f_2(12)=3{,}85$; $f_2(19)=3{,}11$
3. Abschnitt: $f_3(x)=-0{,}253x+7{,}927$

$$f(x)=\begin{cases} 3{,}82 & \textit{für } 0\le x<12 \\ -0{,}0142x^3+0{,}6455x^2-9{,}7141x+51{,}99 & \textit{für } 12\le x<19 \\ -0{,}253x+7{,}927 & \textit{für } 19\le x\le 26 \end{cases}$$

Bemerkung: Diese abschnittsweise definierte Funktion ist **nicht** stetig.

Alternativlösung:

1. Abschnitt siehe oben
2. Abschnitt: Verwendung von nur 4 Messwerten, damit die Stetigkeit erfüllt ist.

12	14	16	19
3,82	3,42	3,74	3,12

   Kubische Regression für diese Messwerte
   $f_2(x)=-0{,}023x^3+1{,}07x^2-16{,}167x+84{,}06$

3. Abschnitt: siehe oben

$$f(x)=\begin{cases} 3{,}82 & \textit{für } 0\le x<12 \\ -0{,}023x^3+1{,}07x^2-16{,}167x+84{,}06 & \textit{für } 12\le x<19 \\ -0{,}253x+7{,}927 & \textit{für } 19\le x\le 26 \end{cases}$$

Bemerkung: Diese abschnittsweise definierte Funktion ist **nicht** differenzierbar. Ob eine differenzierbare Funktion modelliert werden soll, kann diskutiert werden.

Hinweise Abschnittsweise definierte Funktion

Didaktische Hinweise:

Die Lernenden sollen zum Einstieg von einer Glaspfandflasche die Randlinie durch eine abschnittsweise definierte Funktion modellieren. Die Abschnitte werden auf dem Arbeitsblatt bereits festgelegt, ebenso die Funktionstypen, die zu verwenden sind. Trotzdem bleibt die Aufgabe noch offen genug, um verschiedenen Herangehensweisen bei den Lernenden anzuregen.

Als Ergebnis werden die Funktionen der einzelnen Abschnitte als abschnittsweise definierte Funktion zusammengeführt und so die neue Schreibweise eingeführt. Auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit von abschnittsweise definierten Funktionen kann beispielsweise mit Hilfe der Betragsfunktion (Bezug zur LPE 3) eingegangen werden. Als Weiterführung oder Vertiefung können als Wahlthemen z.B. Splines oder CAD behandelt werden.

Methodische Hinweise:

Als Anschauungsobjekte werden einige Glaspfandflaschen, sowie Schnüre zur Vermessung des Umfangs den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt.

Zur Modellierung der Polynomfunktion ist der Einsatz eines GTR oder CAS sinnvoll.

Die Lernenden erarbeiten in Kleingruppen unterschiedliche Funktionen und vergleichen die Ergebnisse in einer Plenumsphase.

Fachliche Hinweise:

Erforderliche Vorkenntnisse: Aufstellen von Funktionstermen; Regression

Die Betragsfunktion

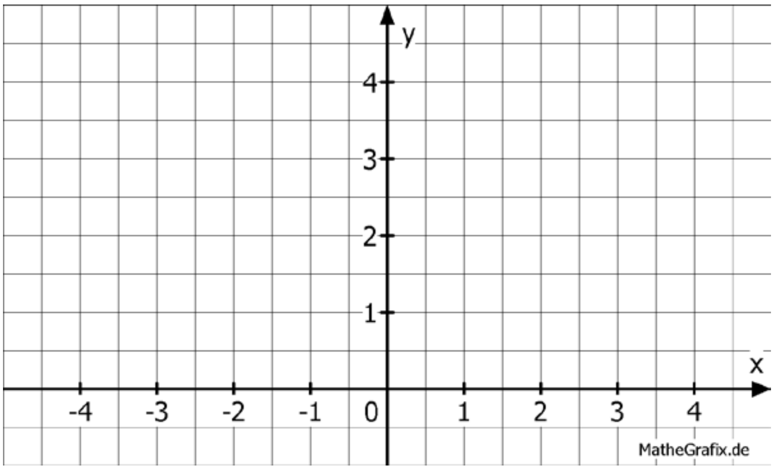
Definition

Die Funktion, die jedem $x \in IR$ seinen Betrag $|x|$ zuordnet, heißt ***Betragsfunktion***.

f: f(x) = |x|

Möchte man den Funktionsterm ohne Betragsstriche schreiben, so muss man die Funktion abschnittsweise definieren.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Zeichne das Schaubild K_f der Betragsfunktion in nebenstehendes Koordinatensystem.

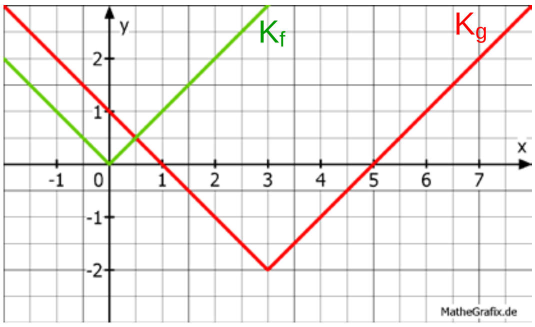
Verschiebungen der Betragsfunktion

Wie bei anderen Funktionen auch, lässt sich das Schaubild K_f der Betragsfunktion durch Veränderung des Funktionsterms in x- und y-Richtung verschieben.

Beispiel: g(x) = |x - 3| - 2

Das Schaubild K_g von g entsteht aus K_f durch Verschiebung um 3 in x-Richtung und um -2 in y-Richtung.

Möchte man den Funktionsterm von g ohne Betragsstriche schreiben, so muss man die Funktion g abschnittsweise definieren. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig, da man nur dann auf die Betragsstriche verzichten kann, wenn man weiß, ob der Wert innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ ist.



1. Fall: x - 3 ≥ 0, d.h. x ≥ 3

g(x) = |x - 3| - 2 = (x - 3) - 2 = x - 5

2. Fall: x - 3 < 0, d.h. x < 3

g(x) = |x - 3| - 2 = -(x - 3) - 2 = -x + 1

Insgesamt also

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{für } x \geq 3 \\ -x + 1 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Die Nullstellen von g lassen sich aus dem Schaubild ablesen: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$. Zur Berechnung dieser Nullstellen muss man die selbe Fallunterscheidung durchführen wie zur Bestimmung des Funktionsterms.

Aufgabe 1:

Beschreibe, durch welche Transformationen das Schaubild K_g aus dem Schaubild der Betragsfunktion hervorgeht, und skizziere das Schaubild in einem Koordinatensystem. Schreibe den Funktionsterm ohne Betragsstriche und berechne die Nullstellen von g.

a) g(x) = |x + 2| - 3 b) g(x) = |x - 1| + 4 c) g(x) = 5 - |x - 2|

Verknüpfungen von Betragsfunktionen

Aufgabe 2:

Schreibe den Funktionsterm ohne Betragsstriche und skizziere das Schaubild K_g in einem Koordinatensystem. Berechne die Nullstellen von g.

a) $g(x) = x + |x|$ b) $g(x) = x - |x|$ c) $g(x) = x \cdot |x|$ d) $g(x) = \frac{x}{|x|}$

Bemerkung:

Die Funktion g mit $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ heißt ***Signum-Funktion*** g: g(x) = sgn(x).

Aufgabe 3: Schreibe die Signum-Funktion ohne Betragsstriche und skizziere das Schaubild in einem Koordinatensystem.

Mehrere Beträge in einem Term / einer Gleichung

Treten in einem Term oder einer Gleichung mehrere Beträge auf, so muss die Fallunterscheidung so erfolgen, dass für jeden Fall eindeutig entschieden werden kann, ob die Werte innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ sind.

Beispiel: $|x + 3| = |2x - 2| + 1$

Ein Vorzeichenwechsel innerhalb der Betragsstriche kann nur an den entsprechenden Nullstellen der Terme innerhalb der Betragsstriche erfolgen, d.h. dort, wo $x + 3 = 0$ bzw. $2x - 2 = 0$ ist, also an den Stellen $x_1 = -3$ bzw. $x_2 = 1$. Dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

$x \leq -3$ oder $-3 < x \leq 1$ oder $x > 1$.

<u>**1. Fall:** $x \leq -3$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 \leq 0$ und $2x - 2 \leq 0$

Somit ist $|x + 3| = -(x + 3)$ und $|2x - 2| = -(2x - 2)$.

Die Gleichung kann damit ohne Betragsstriche geschrieben und gelöst werden:

$\Rightarrow \quad -(x + 3) = -(2x - 2) + 1$

$\Leftrightarrow \quad -x - 3 = -2x + 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 6$

Dies ergibt keine Lösung unserer Gleichung, da in diesem Fall $x \leq -3$ sein muss.

<u>**2. Fall:** $-3 < x \leq 1$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 > 0$ und $2x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow \quad x + 3 = -(2x - 2) + 1$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = -2x + 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0$

Dies ist eine Lösung unserer Gleichung, da $x_1 = 0$ in dem für diesen Fall gültigen Bereich $-3 < x \leq 1$ liegt.

<u>**3. Fall:** $x > 1$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 > 0$ und $2x - 2 > 0$

$\Rightarrow \quad x + 3 = 2x - 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = 4$

Dies ist ebenfalls eine Lösung unserer Gleichung, da $x_2 = 4$ in dem für diesen Fall gültigen Bereich $x > 1$ liegt.

Insgesamt hat die Betragsgleichung also die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

Aufgabe 4:

Löse folgende Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung. Überprüfe deine Lösung graphisch, indem du die Schaubilder der linken und rechten Seite der Gleichung zeichnest (CAS oder Grafikrechner) und die Schnittpunkte bestimmst.

a) $|x + 8| = 3\cdot|x|$

b) $|2x - 5| = 3 - |x - 1|$

c) $|x - 3| = |x + 1| - 5$

d) $|2 - x| = |x + 4| - 6$

e) $\frac{|x+6|}{|2x+1|} = 1$

Aufgabe 5:

Ersetze in Aufgabe 4 jeweils das Gleichheitszeichen durch eines der Ungleichheitszeichen $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ und löse die dabei entstehende Ungleichung. Überprüfe wie in Aufgabe 4 mit dem Taschenrechner.

Tafelanschrieb: Berechnung der Asymptote für $x \to \pm\infty$

Beispiel 1:

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x} = \underbrace{x-2}_{} + \frac{3}{x} \quad \to \frac{3}{x}\ konvergiert\ für\ x \to \pm\infty\ gegen\ 0$

Asymptote $y = x - 2$

Beispiel 2:

$f(x) = \frac{x-5}{x-1} = \frac{x-1-4}{x-1} = \underbrace{1}_{} - \frac{4}{x-1} \quad \to \frac{4}{x-1}\ konvergiert\ für\ x \to \pm\infty\ gegen\ 0$

Asymptote $y = 1$

Beispiel 3:

$f(x) = \frac{x^2-2}{2x-4} \to ?$

→ **Polynomdivision** *(Lehrerhinweis: Durchführung der Polynomdivision)*

$\to (x^2-2):(2x-4) = \underbrace{\frac{1}{2}x + 1}_{} + \frac{2}{2x-4} \quad \to \frac{2}{2x-4}\ konvergiert\ für\ x \to \pm\infty\ gegen\ 0$

Asymptote $y = \frac{1}{2}x + 1$

Beispiel 4:

$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8} \to ?$ *(Lehrerhinweis: Vergleich von z.B. $f(\pm 100)$ mit $f(\pm 1000)$)*

Asymptote $y = 0$

Merke:

Für die Asymptote der gebrochen-rationalen Funktion f gilt:

1. Ist $n < m$, so ist die x-Achse die waagrechte Asymptote
2. Ist $n = m$, so verläuft die Asymptote parallel zur x-Achse mit der Gleichung $y = \frac{a_n}{b_m}$
3. Ist $n > m$, so ist die Asymptote der durch Polynomdivision entstandene ganzrationale Funktionsterm (der gebrochen-rationale Rest ist für das asymptotische Verhalten irrelevant)

Gebrochenrationale Funktionen

Definition

Eine ***gebrochenrationale Funktion f*** ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen (Polynomfunktionen) g und h:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad \text{z.B.} \qquad f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 4x + 7}$$

Dabei bezeichnet n den Zählergrad und m den Nennergrad.

Stellen, an denen eine Funktion f nicht definiert ist, heißen ***Definitionslücken***.

Eine Stelle x_0 ($\triangleq$ Definitionslücke), an der das Schaubild einer Funktion f sich einer senkrechten Geraden annähert, heißt „Unendlichkeitsstelle“ oder ***Polstelle***. Diese Grenzgerade heißt ***senkrechte Asymptote***.

Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen

Aufgabe 1

a) Zeichne die Schaubilder Kf folgender Funktionen.

Lies die Definitionslücken und das Verhalten an den Definitionslücken ab und gib die Gleichung der Asymptoten an.

b) Berechne die Nullstellen der Zähler- und Nennerfunktion und vergleiche diese mit den Nullstellen von Kf und den Definitionslücken der Funktion f.

c) Formuliere einen Merksatz zu den obigen Erkenntnissen.

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x-2}; \qquad f_2(x) = \frac{x^3}{x^2-1}; \qquad f_3(x) = \frac{3-x}{x^2-2x+1}; \qquad f_4(x) = \frac{x^2+2}{x^3-6x^2+9x}$$

Aufgabe 2

Ergänze folgende Sätze:

a) Die Nullstellen von f sind...

b) Die Definitionslücken von f sind...

c) f hat an der Stelle x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn...

d) f hat an der Stelle x_0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn...

Aufgabe 3

Betrachte das Schaubild der Funktion $f_5(x) = \frac{2x^2-2x-12}{3x+6}$.

Faktorisiere Zähler und Nenner und erläutere, warum das Schaubild an der Stelle $x = -2$ weder eine senkrechte Asymptote noch eine Nullstelle besitzt.

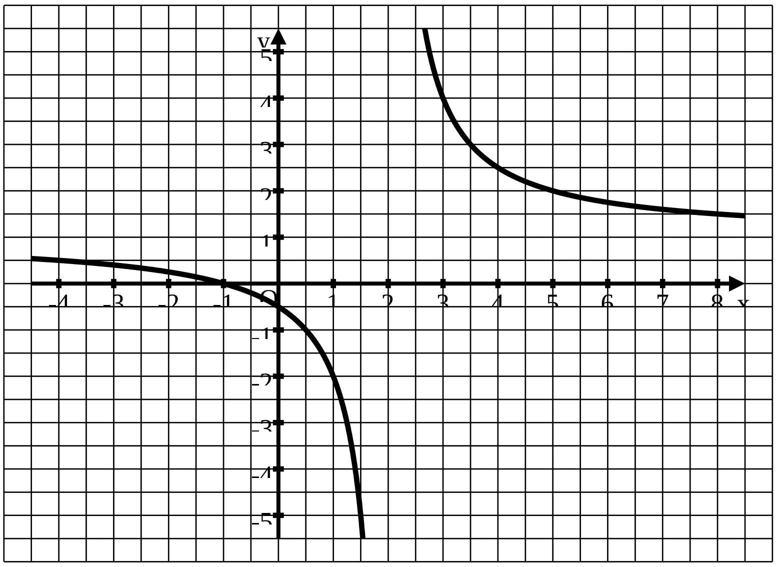
Erläutere, ob und wenn ja, wo der Unterschied zur Funktion $g(x) = \frac{2x-6}{3}$ liegt.

Ergänze folgenden Satz: Eine hebbare Definitionslücke x_0 von f liegt vor, wenn …

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:

$f_1(x) = \frac{x+1}{x-2}$:



Definitionslücke: $x = 2$

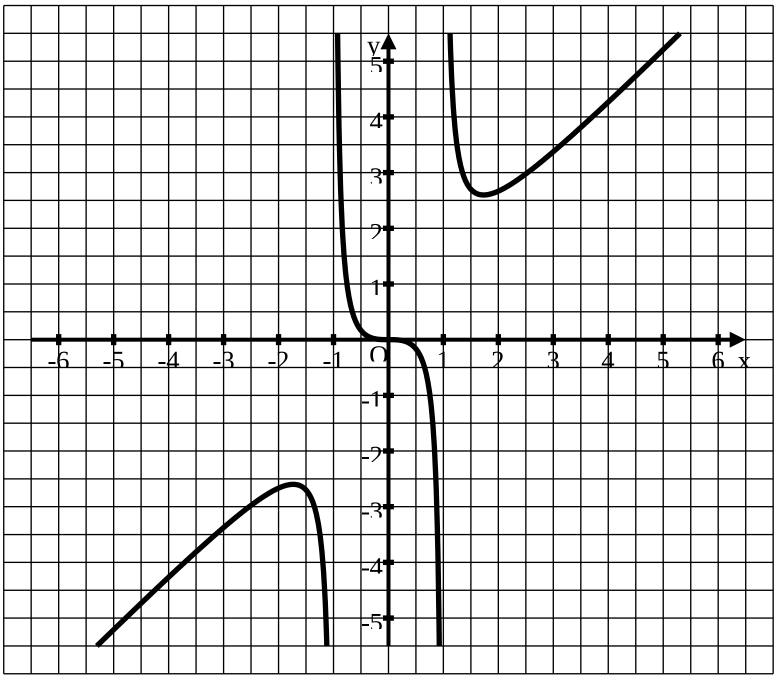
Verhalten an der Definitionslücke: für $x \to 2$ und $x < 2$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 2$ und $x > 2$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 2$, waagrechte Asymptote: $y = 1$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = -1$ (entspricht Nullstelle von K_f),

Nullstelle der Nennerfunktion: $x = 2$ (entspricht Definitionslücke)

$f_2(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$:



Definitionslücken: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

Verhalten an den Definitionslücken:

$x_1 = -1$: für $x \to -1$ und $x < -1$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to -1$ und $x > -1$ gilt: $f(x) \to \infty$

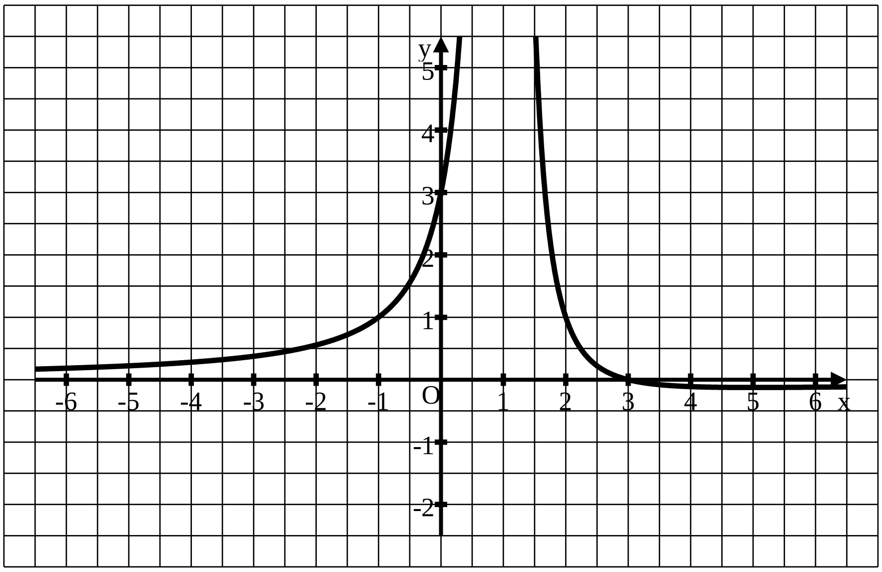
$x_2 = 1$: für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 1$ und $x > -1$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = -1$, $x = 1$, schiefe Asymptote: $y = x$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = 0$ (entspricht Nullstelle von K_f)

Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (entsprechen Definitionslücken)

$f_3(x) = \frac{3-x}{x^2-2x+1}$:



Definitionslücke: $x = 1$

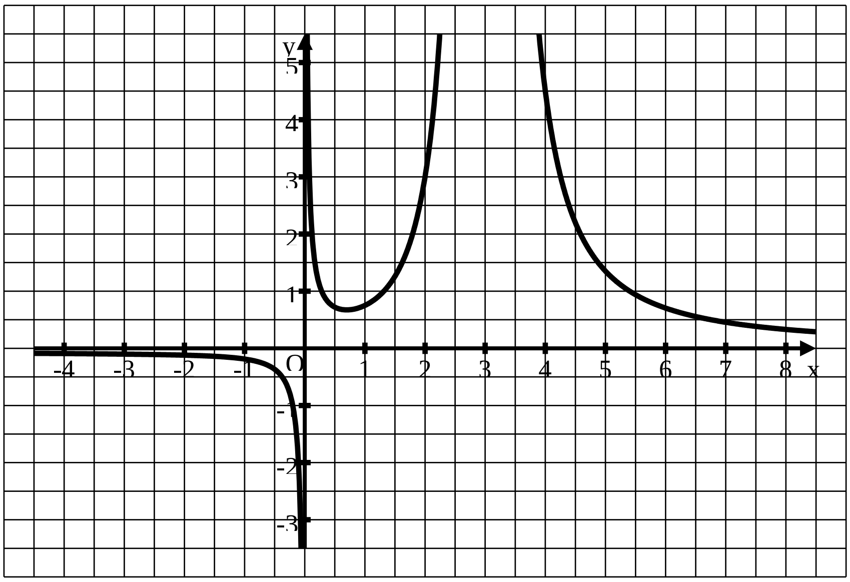
Verhalten an der Definitionslücke: für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $f(x) \to +\infty$, für $x \to 1$ und $x > 1$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 1$, waagrechte Asymptote: $y = 0$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = 3$ (entspricht Nullstelle von K_f)

Nullstelle der Nennerfunktion: $x = 1$ (entspricht Definitionslücke)

$f_4(x) = \frac{x^2+2}{x^3-6x^2+9x}$:



Definitionslücken: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Verhalten an den Definitionslücken:

$x_1 = 0$: für $x \to 0$ und $x < 0$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $f(x) \to \infty$

$x_2 = 3$: für $x \to 3$ und $x < 3$ gilt: $f(x) \to +\infty$, für $x \to 3$ und $x > 3$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptoten: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, waagrechte Asymptote: $y = 0$

Nullstelle der Zählerfunktion: nicht vorhanden

Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (entspricht Definitionslücken)

Aufgabe 2:

a) Die Nullstellen von f sind die Nullstellen der Zählerfunktion.

b) Die Definitionslücken von f sind die Nullstellen der Nennerfunktion.

c) f hat der Stelle x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „doppelt“ vorkommt (Vielfachheit 2).

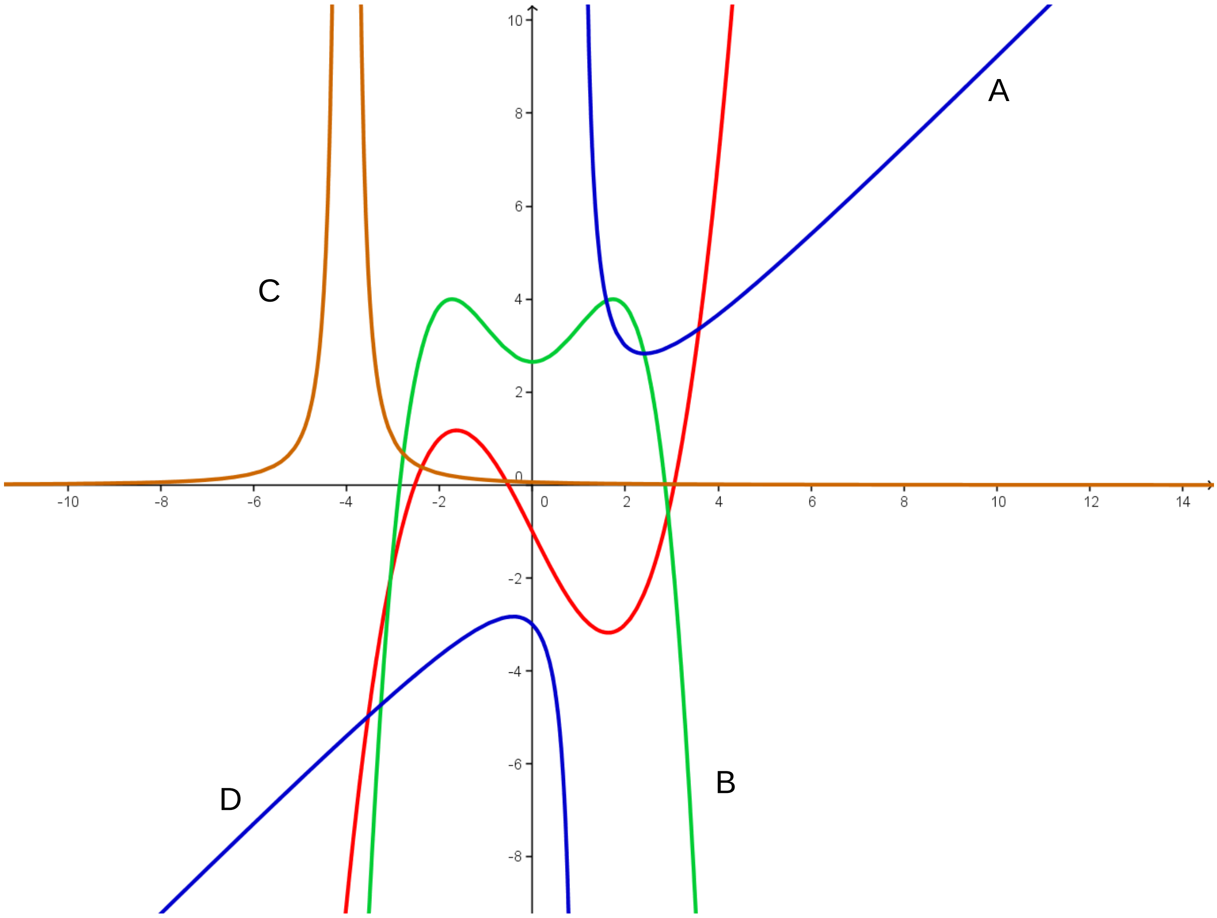
d) f hat der Stelle x_0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „einfach“ vorkommt (Vielfachheit 1).

Aufgabe 3:

$f_5(x) = \frac{2x^2-2x-12}{3x+6} = \frac{2(x^2-x-6)}{3(x+2)} = \frac{2(x+2)(x-3)}{3(x+2)} \rightarrow$ da sich der Faktor $(x+2)$ in Zähler und Nenner kürzt, verschwindet sowohl die Nullstelle als auch die senkrechte Asymptote.

Durch das Kürzen entsteht die Funktion $g(x) = \frac{2x-6}{3}$, deren Schaubild im Gegensatz zum Schaubild von f_5 keine Lücke bei $x = -2$ besitzt, sonst aber identisch verläuft.

Eine hebbare Definitionslücke x_0 von f liegt vor, wenn sie durch Kürzen des Funktionsterms behoben und dadurch der Definitionsbereich erweitert werden kann.



1. **Aufgabe:** Formuliere Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Schaubilder A, B, C, D.

2. Lösungsvorschlag:

a. Gemeinsamkeiten:
   - A und B ganzrationale Funktionen → Schaubilder lassen sich „durchzeichnen“
   - C und D weisen „Lücken“ auf und nähern sich diesen von beiden Seiten an

b. Unterschiede:
   - A und B streben für $x \to \pm\infty$ gegen $\pm\infty$, während C für $x \to \pm\infty$ gegen die x-Achse strebt
   - Bei C läuft das Schaubild nach oben und kommt nach der Lücke wieder von dort, während bei D das Schaubild nach unten läuft und nach der Lücke von oben kommt (Lücken mit bzw. ohne Vorzeichenwechsel)

1 Didaktische Hinweise

Durch den Vergleich von Schaubildern bekannter Polynomfunktionen mit Schaubildern gebrochenrationaler Funktionen erkennen die Schülerinnen und Schüler im Einstieg wesentliche Unterschiede. Wesentlich hierbei sind das asymptotische Verhalten gegen plus und minus unendlich sowie gegen die Definitionslücke. Anschließend erhalten die Schülerinnen und Schüler die Definition und erarbeiten sich die charakteristischen Eigenschaften des neuen Funktionstyps. Da sich die Bestimmung der Asymptote gebrochenrationaler Funktionen gegen plus/minus unendlich für Schülerinnen und Schüler erfahrungsgemäß nicht direkt erschließt, erfolgt der dazugehörige Rechenweg per Polynomdivision im Lehrer-Schüler-Gespräch. Durch den dabei entstandenen Grad der Asymptotengleichung wird den Schülerinnen und Schüler deren Verlauf deutlich.

2 Methodische Hinweise

Zur visuellen Unterstützung empfiehlt sich der Einsatz geeigneter digitaler Mathematikwerkzeuge.

.

3 Fachliche Hinweise

Im Vordergrund dieser Unterrichtseinheit stehen die Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen und ihrer Schaubilder. Für die dazu gehörige Differentialrechnung wird auf die Unterrichteinheit Quotientenregel verwiesen.

4 Unterrichtsmaterialien

Arbeitsblatt 1: Einstieg
Arbeitsblatt 2: Untersuchung der Funktionseigenschaften
Tafelanschrieb: Berechnung Asymptote

5 Literaturhinweise

Brüggemann, Juliane u.a.: Mathematik. Allgemeine Hochschulreife, (Cornelsen Verlag), Berlin 2007, S.86-97, 338-341.

Freudigmann, Hans u.a.: Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Leistungskurs Rheinland-Pfalz, (Klett Verlag), Stuttgart 2014, S.206-217.

Jahnke Thomas u.a. (Hrsg.): Fokus Mathematik – Gymnasiale Oberstufe – Bayern: 11.Jahrgangsstufe, (Cornelsen Verlag), Berlin 2009, S.140-150.

Schmidt, Günther u.a. (Hrsg.): Mathematik. Neue Wege. Analysis II, (Schroedel Verlag), Braunschweig 2011, S.224-229.

Die Kettenregel

Didaktische Vorbemerkungen

Die Kettenregel kommt auch im regulären Jahrgangsstufenunterricht vor, so dass hier eine sorgfältige Abgrenzung notwendig ist, da Mathe+ ja weder dem Regelunterricht vorgreifen noch den am Kurs teilnehmenden Schülerinnen und Schülern einen offensichtlichen Vorteil verschaffen soll. Eine vollkommende Beschränkung auf die „anderen" Funktionstypen erscheint aber auch nicht sinnvoll, da ja ein realistisches Bild vom Einsatz der Kettenregel gegeben werden sollte. Die folgenden Beispiele mögen hier als Anregung dienen. Sie zeigen natürlich nur eine von vielen Möglichkeiten auf, mit dem Problem umzugehen. Und manche sind zugegebenermaßen „gefährlich" nahe am Regelunterricht. Ein exakter Beweis der Kettenregel ist in der Schule schwierig, da er für gewöhnlich den Begriff der Stetigkeit benutzt. Das im Folgenden aufgeführte Plausibilitätsargument deutet aber immerhin das Entstehen der Ableitungsregel an. Es hat aber durchaus seine Tücken, insofern es die Werte betrifft, für die $g(x) - g(x_o) = 0$ sein könnte, wie man im Buch Analysis 1 von Barner/Flohr (Kap. 8.1) nachlesen kann.

Formulierung der Regel

Sind die Funktionen g und f differenzierbar und ist es möglich, ihre Verkettungsfunktion h mit $h(x) = f(g(x))$ zu bilden, so ist auch h differenzierbar und es gilt:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Plausibilitätsargument

Man kann den Differenzenquotienten folgendermaßen umformen:

$$\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_o)\big)}{x - x_o}$$

$$= \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_o)\big)}{g(x) - g(x_o)} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}.$$

Beispiele (zum rein formalen Ableiten):

$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$

$f(x) = \sqrt{\sin(x)}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos x$

$f(x) = \tan(e^{3x}), \quad f'(x) = \frac{1}{\cos(e^{3x})^2} \cdot 3e^{3x}$

$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$f(x) = \sin(\sqrt{x}), \quad f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Komplexeres Beispiel:

$f(x) = \frac{3}{(4x+x^3)^2} = 3 \cdot (4x+x^3)^{-2}$ und

$f'(x) = -6 \cdot (4x+x^3)^{-3} \cdot (4+3x^2) = -\frac{6(4+3x^2)}{(4x+x^3)^3}$

Anwendung: Ableitung der Logarithmusfunktion

Mit Hilfe der Kettenregel und der (bekannten) Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion kann man die Regel zum Ableiten der natürlichen Logarithmusfunktion gewinnen:

Mit $g(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$ hat man

$$h(x) = f(g(x)) = \ln(e^x) = x.$$

Und damit $h'(x) = 1$. Andererseits gilt nach der Kettenregel

$$h'(x) = (\ln(e^x))' \cdot e^x ,$$

also

$$(\ln(e^x))' \cdot e^x = 1.$$

Mit $e^x = u$ ergibt sich somit folgende Rechenregel:

$$(\ln(u))' \cdot u = 1 \quad \text{oder} \quad (\ln(u))' = \frac{1}{u}.$$

Beispiele (für die Ableitung von Funktionen mit logarithmischen Termen):

$f(x) = (\ln x^2)^3, \quad f'(x) = 3(\ln x^2)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$

$f(x) = \ln(\ln(x)), \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} = (\ln(x))^{-1}\,, \quad f'(\mathrm{x}) = -(\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$

$f(x) = \ln(e^x + 1), \quad f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x$

Komplexere Beispiele

Das erste Beispiel ($f(x) = x^x$) dürfte bei den Schülerinnen und Schülern auf besonderes Interesse stoßen. Die anderen beiden sollen nur die Möglichkeiten aufzeigen. Man kann sich auch vorstellen, hieraus einen Wettbewerb zu machen: Eine Gruppe denkt sich eine Funktion aus, die eine andere Gruppe dann ableiten muss. Man könnte zur Selbstkontrolle ein CAS-System einsetzen.

$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}, \quad f'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1)$

$f(x) = \ln(x^2 + x) \cdot \sin(\sqrt{x}), \quad f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \ln(x^2 + x)\cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sin\left(\frac{2}{\ln(x)}\right) = \sin(2\,(\ln(x))^{-1}), \quad f'(x) = \cos(2(\ln(x))^{-1}) \cdot (-2)(\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x}$

Die Quotientenregel

Didaktische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler kennen aus dem Unterricht der Jahrgangsstufe sowohl die Produkt- als auch die Kettenregel. Die Quotientenregel kann unter Verwendung dieser beiden Regeln leicht hergeleitet werden. Dies kann zunächst an einem einfachen Beispiel erfolgen, welches danach auf den allgemeinen Fall übertragen wird.

Die Materialien der Handreichung bauen zum Teil auf die Quotientenregel auf. Die Quotientenregel sollte daher vor der Differentialrechnung gebrochenrationaler Funktionen behandelt werden (vgl. 5.1: Didaktische Hinweise).

Unterrichtsmaterialien

Arbeitsblatt zur Quotientenregel

Ableitung eines Bruchs an einem Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} = \boxed{} \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot (-2x^{-3})$$

$$= \frac{\boxed{}}{x^2} + \frac{\sin(x) \cdot (-2)}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \boxed{}}{x^4}$$

Bruch als Produkt umschreiben

Das Produkt mittels der Produkt-regel ableiten

Auf den gemeinsamen Nenner erweitern und zu einem Bruch zusammenfassen.

Jetzt allgemein:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$$f'(x) = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\boxed{} - \boxed{}}{(v(x))^2}$$

Bruch als Produkt umschreiben
→Nenner hoch -1

Das Produkt mittels der Produkt-regel ableiten. Kettenregel bei $(v(x))^{-2}$ beachten.

Auf den gemeinsamen Nenner erweitern und zu einem Bruch zusammenfassen.

Die Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Aufgaben:

Bilde jeweils die erste Ableitung

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{4x^2}$

b) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{cos(4x)}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2-1}$

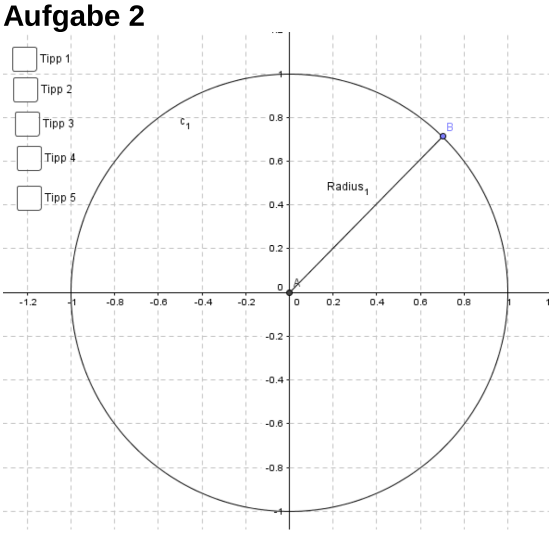
Tangensfunktion

Definition

Aufgabe 1

Stelle mithilfe der Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck einen Zusammenhang zwischen den drei Winkelfunktionen in Gleichungsform her.
Definition Tangens: …

Aufgabe 2



Stelle den Tangens aufgrund seiner neuen Definition und mithilfe des Strahlensatzes am Einheitskreis dar.
Tipps: siehe Geogebra-Datei „Tangens.ggb"
*

Eigenschaften der Tangensfunktion

Aufgabe 1

Zeichne mithilfe der neuen Definition ein mögliches Schaubild der Tangensfunktion.

Aufgabe 2

Leite zentrale Eigenschaften der Tangensfunktion (Definitionsbereich/-lücken, Wertebereich, Nullstellen, Monotonie/Steigungsverhalten, Wendestellen, Asymptote, Symmetrie, Periodizität) mithilfe der neuen Definition ab.
Definitionsbereich:
Wertebereich:
Nullstellen:
Monotonie:
Wendestellen:
Asymptote:
Symmetrie:

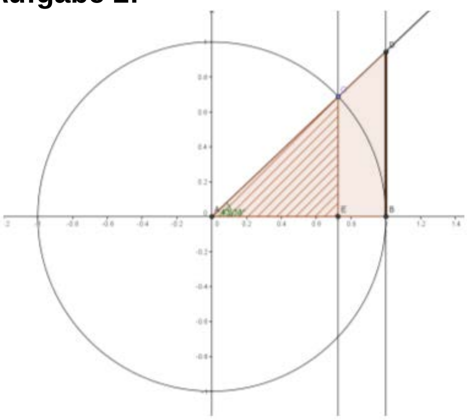
Lösungsvorschlag:

Definition:

Aufgabe 1: $sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$; $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$, $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
$\rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} : \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} \cdot \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \tan(\alpha)$

Definition Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Aufgabe 2:



$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
Dreieck gesucht, dessen Ankathete gleich 1 ist, um Strahlensatz nutzen zu können
$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Gegenkathete}{1}$
→ Der Tangens entspricht der Seitenlänge des gestreckten Dreiecks bzw. dem Tangentenabschnitt durch den Punkt $P(1|0)$

2. Eigenschaften der Tangensfunktion:
Aufgabe 1: Vorstellung und Diskussion der Vorschläge der Schülerinnen und Schüler.
Aufgabe 2: Definitionsbereich: $\mathbb{R}\backslash\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
Wertebereich: $\mathbb{R}$

Nullstellen: $x = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Monotonie: in jedem Intervall streng monoton steigend

Wendestellen: $x = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Asymptote: $x = \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. zu jedem Wendepunkt
Periodizität: π

Bild: Verkehrsschild Steigung

(z.B. www.fuehrerschein24.net/wp-content/uploads/Verkehrszeichen/Gefahrenzeichen/Verkehrszeichen-Gefahrenzeichen-Steigung-12.gif (Zugriff: 11.03.2015))

Leitfragen:

1. Was bedeutet die Prozentangabe auf dem Verkehrsschild?

Lösungsvorschlag: 12 m Höhenunterschied bei 100 m Fahrt in waagrechter Richtung

2. Warum verwendet man hierbei nicht die tatsächlich zurückgelegte Strecke?

Lösungsvorschlag: Steigung ist definiert als Verhältnis von senkrechter Höhe zu waagrechter Länge

3. Welcher Winkel α entspricht einer Steigung von 100%?

Lösungsvorschlag: Bestimmung des Winkels α mithilfe des Tangens:

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{100}{100} = 1 => \alpha = 45°$$

Didaktische Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler erkennen den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus, dargestellt durch die Tangensfunktion, erarbeiten sich die entscheidenden Eigenschaften der Tangensfunktion und wenden diese bei Übungsaufgaben an.
Um bei den Schülerinnen und Schülern bereits vorhandene Kenntnisse bezüglich des Tangens wachzurufen, wird an ihr Vorwissen aus der Geometrie angeknüpft, das den Tangens als Quotient von Gegenkathete und Ankathete im rechtwinkligen Dreieck definiert. Dazu wird ein Anwendungsbeispiel aus dem Straßenverkehr verwendet, das nach einer Wiederholung bereits bekannter Zusammenhänge als Überleitung zur Untersuchung der Tangensfunktion dient.
In einer ersten Erarbeitungsphase wird zunächst der Tangens als Quotient aus Sinus und Kosinus „neu" definiert. Mithilfe einer kurzen Wiederholung dieser beiden Winkelfunktionen am Einheitskreis sowie der Frage nach der Lage des Tangens wird den Schülerinnen und Schülern aufgrund des Strahlensatzes der Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen anschaulich gemacht. (Hierbei kann ein kurzer historischer Exkurs zum Begriff „Tangens" = Länge des Tangentenabschnitts eingeschoben werden.)
In einer zweiten Erarbeitungsphase überlegen sich die Schülerinnen und Schüler aufgrund der neuen Definition zunächst ein mögliches Schaubild der Tangensfunktion und leiten sich anschließend selbstständig mithilfe der neuen Definition und GTR die zentralen Eigenschaften der Tangensfunktion ab. Der vermutete Verlauf des Schaubildes sowie die erarbeiteten Eigenschaften werden anschließend durch eine Visualisierung des tatsächlichen Schaubildes miteinander verglichen und besprochen. Nach der Ergebnissicherung wird schließlich anhand ausgewählter Aufgaben die Anwendung der erarbeiteten Eigenschaften eingeübt.

Methodische Hinweise

Empfehlenswert für sämtliche Erklärungen dieser Stunde sind neben der Internetseite des Landesbildungsservers der Einsatz des GTR und eines CAS. Bei Arbeitsblatt Aufgabe 2 kann zur Strukturierung des Gedankenganges der Schülerinnen und Schüler die Geogebra-Datei „Tangens.ggb" zur Verfügung gestellt werden.

Fachliche Hinweise

Im Vordergrund dieser Unterrichtseinheit stehen die Herleitung und die Untersuchung der Eigenschaften der Tangensfunktion sowie deren Anwendung. Für die dazu gehörige Differentialrechnung zur Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung wird auf die vorherige Unterrichtseinheit Quotientenregel verwiesen, für den Begriff „Polstelle" auf die vorherige Unterrichtseinheit gebrochenrationale Funktionen.

Unterrichtsmaterialien

Arbeitsblatt 1: Einstieg
Arbeitsblatt 2: Herleitung der „neuen" Tangensdefinition, Untersuchung der Funktionseigenschaften

Internetseite Schaubild zum Einheitskreis: http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/geometrie/trig/deferw/koeikr.html (Zugriff: 11.03.2015)

Literaturhinweise

Brüggemann, Juliane u.a.: Mathematik. Allgemeine Hochschulreife, (Cornelsen Verlag), Berlin 2007, S.86-97, 338-341.

Schmid, August u.a. (Hrsg.): Lambacher Schweizer. Analysis Leistungskurs Gesamtausgabe, (Klett Verlag), Stuttgart 1990[1], S.187-188.

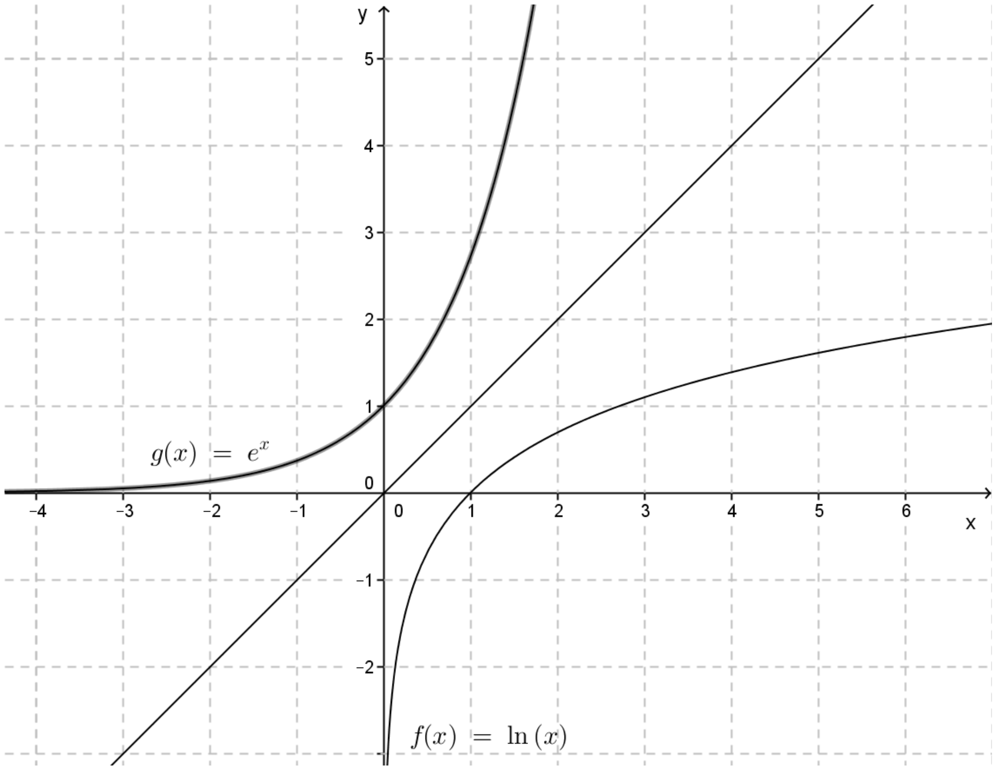
Schmidt, Günther u.a. (Hrsg.): Mathematik. Neue Wege. Analysis II, (Schroedel Verlag), Braunschweig 2011, S.235-236.

Übergeordneter Arbeitsauftrag: **Sozialform:** Partnerarbeit

Erarbeiten Sie sich das Thema „Die natürliche Logarithmusfunktion“ selbstständig.
Arbeiten Sie dazu die Infoboxen und Arbeitsaufträge durch. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse jeweils an der Kontrollstation.

Infobox 1

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt **natürliche Logarithmusfunktion** und wird mit $x \mapsto ln(x),\ x \in \mathbb{R}_+^*$ bzw. mit $f(x) = \ln(x), x \in \mathbb{R}_+^*$ bezeichnet.



Arbeitsauftrag 1:
Erarbeiten Sie mittels des obigen Schaubildes die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ und halten Sie Ihr Ergebnis nachfolgend fest:

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion
Definitionsbereich: D=
Wertebereich: W =
Es gilt: ln(1)= ___ . Folglich lautet die Nullstelle ________ .
Es gilt: ln(e) = ___ .
Für 0<x<1 liegt das Schaubild ________________ der x-Achse, also ln (x) ___ 0.
Für x>1 liegt das Schaubild ______________ der x-Achse, also ln(x) ___ 0.
Monotonie:
Grenzverhalten:
→Senkrechte Asymptote:
Die natürliche Logarithmusfunktion ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^*$.

Infobox 2

Bei der **Bestimmung der Definitionsmenge** muss beachtet werden, dass $\ln(g(x))$ nur für $g(x) > 0$ definiert ist.

Beispiele:
1. $f(x) = \ln(x-2)$
   Es muss gelten $x - 2 > 0, also\ x > 2$.
   Somit D = $]2; \infty[$

2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
   Es muss gelten $x^2 - 1 > 0, also\ x > 1\ \vee x < -1$.
   Somit D = $\mathbb{R}\backslash[-1; 1]$

Arbeitsauftrag 2:
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f mit $f(x) = \ln(x + 5)$.

Arbeitsauftrag 3:

a) Wie entsteht das Schaubild von $\mathrm{g(x)} = -\ln(\mathrm{x})$ und das Schaubild von $\mathrm{h(x)} = \ln(-\mathrm{x})$ aus dem Schaubild von $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$? Stellen Sie eine Vermutung auf. Kontrollieren Sie Ihre Vermutung mit Ihrem Digitalen Mathematikwerkzeug.

b) Zeichen Sie das Schaubild von $\mathrm{i(x)} = \ln(\frac{1}{x})$ und vergleichen Sie es mit dem von $\mathrm{g(x)} = -\ln(\mathrm{x})$.

c) *Ordnen Sie die Parameter zu. (Vergleich mit Verhalten trigonometrischer Funktionen)*

$$f(x) = a\ ln(b(x-c)) + d$$

Streckung/ Stauchung in x-Richtung	Verschiebung in y-Richtung	Streckung in y-Richtung	Verschiebung in x-Richtung

Infobox 3

Lösen von Logarithmusgleichungen

Mögliche Gleichungstypen		**Anwendung einer Lösungsstrategie**
Beispiele	**Allg. Vorgehen**	**Im Beispiel**
$\ln(x) = 4$ $\ln(x^2 - 15) = 1$	Potenzieren mit Basis e	$\ln(x) = 4 \;\; \mid potenzieren\ mit\ Basis\ e$ $e^{\ln(x)} = e^4$ $x = e^4$ $\ln(x^2 - 15) = 1 \;\; \mid potenzieren\ mit\ Basis\ e$ $e^{\ln(x^2-15)} = e^1$ $x^2 - 15 = e \;\mid\; +15$ $x^2 = e + 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt{e+15} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{e+15}$
$x \cdot \ln(x) = 0$ $x \cdot \ln(x-2) = 0$	Anwendung des Satzes vom Nullprodukt	$x \cdot \ln(x) = 0 \overset{SvNP}{\Longrightarrow} x_1 = 0 \notin D =]0; \infty[$ $\overset{SvNP}{\Longrightarrow} \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = 1$ (mit Vorgehen „Potenzieren mit Basis e“) $x \cdot \ln(x-2) = 0 \overset{SvNP}{\Longrightarrow} x_1 = 0 \notin D =]2; \infty[$ $\overset{SvNP}{\Longrightarrow} \ln(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = 3$ (mit Vorgehen „Potenzieren mit Basis e“)
$(\ln(x))^2 + 5\ln(x) + 6 = 0$	Substitution	Substitution: $\ln(x) = u \;\; \Rightarrow \;\; u^2 + 5u + 6 = 0$ $\Rightarrow \;\; u_1 = -2 \qquad u_2 = -3$ Rücksubstitution: $x_1 = e^{-2} \quad \vee \quad x_2 = e^{-3}$

Arbeitsauftrag 4:

a) Vollziehen Sie die Lösungswege zum Lösen von Logarithmusgleichungen anhand der Beispiele nach.

b) Lösen Sie folgende Gleichungen:

1. $2\ln(x) - 2 = 0$
2. $2 - \ln(x^2) = 0$
3. $(\ln(x) + 1)^2 = 9$
4. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 8 = 0$
5. $xln(-x) - 4x = 0$
6. $6\ln(x) + (\ln(x))^2 = -5$
7. $2\ln(x) - 1 = \ln(x) + 3$

Infobox 4

Die **Ableitungsfunktion f`** der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ lautet $f`(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\cdot ln\left(\frac{x+h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right))$$

$$= \lim_{h\to 0}(\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{x}}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{x}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}})$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}(ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}) = \frac{1}{x}\cdot\ln(e) = \frac{1}{x}$$

Weiterhin finden die Summen- und Faktorregel Anwendung. Ebenso können die Kettenregel, die Produktregel und die Quotientenregel bei der Bildung von Ableitungen logarithmischer Funktionen zum Einsatz kommen.

a) **Kettenregel**: $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$ $\quad f`(x) = \frac{1}{u(x)}\cdot u`(x)$

Beispiele:

$f(x) = \boxed{\ln}(\boxed{2x})$ $\quad f`(x) = \boxed{\frac{1}{2x}}\cdot\boxed{2} = \frac{1}{x}$

Äußere Funktion — Innere Funktion — Ableitung äußere Funktion — Ableitung innere Funktion

$f(x) = \ln(3x+1)$ $\quad f`(x) = \frac{1}{3x+1}\cdot 3 = \frac{3}{3x+1}$

b) **Produktregel**: $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $\quad f`(x) = u`(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v`(x)$

Beispiel:

$f(x) = x\cdot\ln(x)$ $\quad f`(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

a) **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\quad f`(x) = \frac{u`(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v`(x)}{(v(x))^2}$

Beispiel:

$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ $\quad f`(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 2\ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2\cdot(1-\ln(x))}{x^2}$

Arbeitsauftrag 5:

Bilden Sie jeweils die Ableitungsfunktion f`.

a) $f(x) = -2x - 0{,}5\ln(x)$

b) $f(x) = 2x^2 - ex + 5\ln(x) + 1$

c) $f(x) = s \cdot ln(-x) + 5x$

d) $f(x) = 3\ln(x^2 - 4)$

e) $f(x) = \ln(e)\, x + 2\ln(ex)$

f) $f(x) = xln(x-2)$

g) $f(x) = \frac{4\ln(x)}{x}$

h) $f(x) = (\ln(x) - 3)^2$

i) $f(x) = (x-1)\ln(x)$

j) $f(x) = \ln(3x-4)\, x^2$

k) $f(x) = \frac{2x^3}{\ln(x)}$

Arbeitsauftrag 6:

Zeichen Sie die Schaubilder der nachfolgenden Logarithmusfunktionen mit einem digitalen Mathematikwerkzeug.

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und die „Randstelle" an.

Ermitteln Sie mittels Untersuchung des Grenzverhaltens, ob es eine Asymptote gibt. (Achtung: Es kann senkrechte und waagrechte Asymptoten geben!)

a) $f(x) = \ln(x-1)$

b) $f(x) = x \cdot ln(x)$

c) $f(x) = x \cdot \ln(x+3)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Arbeitsauftrag 7:

Erstellen Sie ein Vernetzungsdiagramm zum Thema „Die natürliche Logarithmusfunktion".

Ordnen Sie dazu die beiliegenden Begriffskärtchen und selbst geschriebene Kärtchen, auf einem leeren Blatt Papier in einer sinnvollen Struktur an.

Stellen Sie Zusammenhänge durch Verbindungspfeile, -linien und ggf. Wörtern und Begriffen her.

Kleben Sie am Ende die Begriffskärtchen auf.

Arbeitsauftrag 8:

Bearbeiten Sie nachfolgende Aufgabe.

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 1 - (\ln(1-x))^2,\ x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f heißt K.

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f. Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

(Aus einer alten Abituraufgabe (BG, LK 1993, Gruppe 1, Analysis, Aufgabe 3))

Nullstellen	f(x)=a ln(b(x)+c)+d	Asymptoten	Quotientenregel	Verlauf vom I. in den II. Quadranten
Senkrechte Asymptote	ln(1)=o	Definitionsbereich	Streckung in y-Richtung	Potenzieren mit Basis e
Satz vom Nullprodukt	Kettenregel	Substitution	Waagrechte Asymptote	Produktregel
ln-Funktion in x-Richtung gestreckt	Monotonie	ln(e)=1	f\`(x)=$\frac{1}{x}$	Das Schaubild von i(x)=ln(x)

Kontrollstation:

Arbeitsauftrag 1:

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion

Definitionsbereich: D= $\mathbb{R}_+^*$

Wertebereich: W = $\mathbb{R}$

Es gilt: ln(1)= 0 . Folglich lautet die Nullstelle x = 0.

Es gilt: ln(e) = 1 .

Für 0<x<1 liegt das Schaubild unterhalb der x-Achse, also ln (x) < 0.

Für x>1 liegt das Schaubild oberhalb der x-Achse, also ln(x) > 0.

Monotonie: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\ mit\ x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

Somit ist f streng monoton steigend auf D.

Grenzverhalten: Für $x \to \infty\ gilt\ f(x) \to \infty$

Für $x \to 0\ gilt\ f(x) \to -\infty$

→Senkrechte Asymptote: x = 0

Die natürliche Logarithmusfunktion ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^*$.

Arbeitsauftrag 2:

Es muss gelten x + 5 > 0, also x > -5.

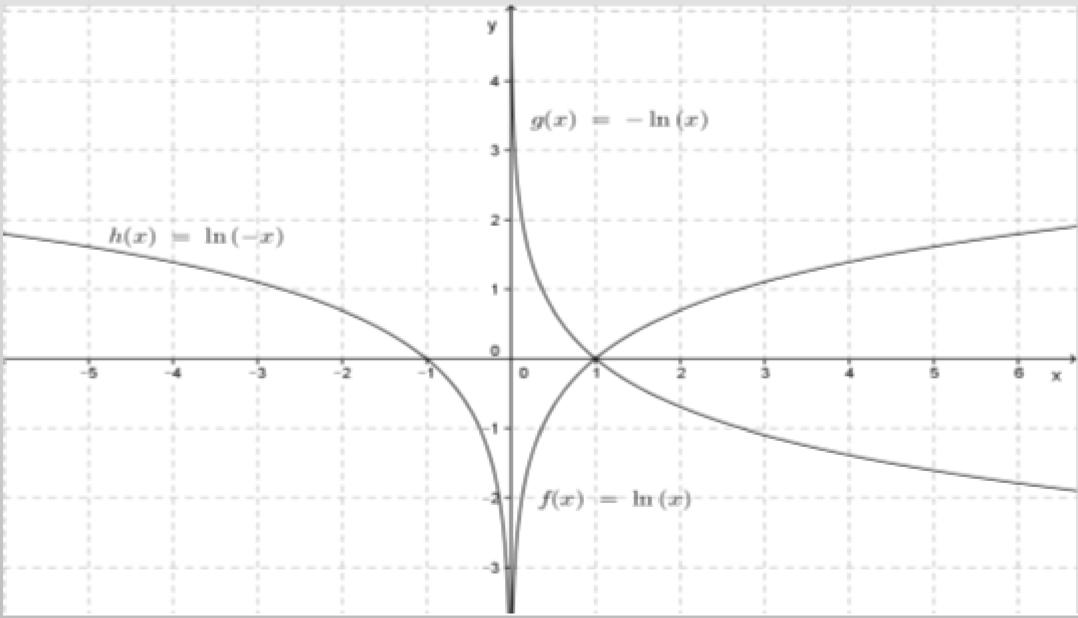
Somit D =]-5; ∞[

Arbeitsauftrag 3:

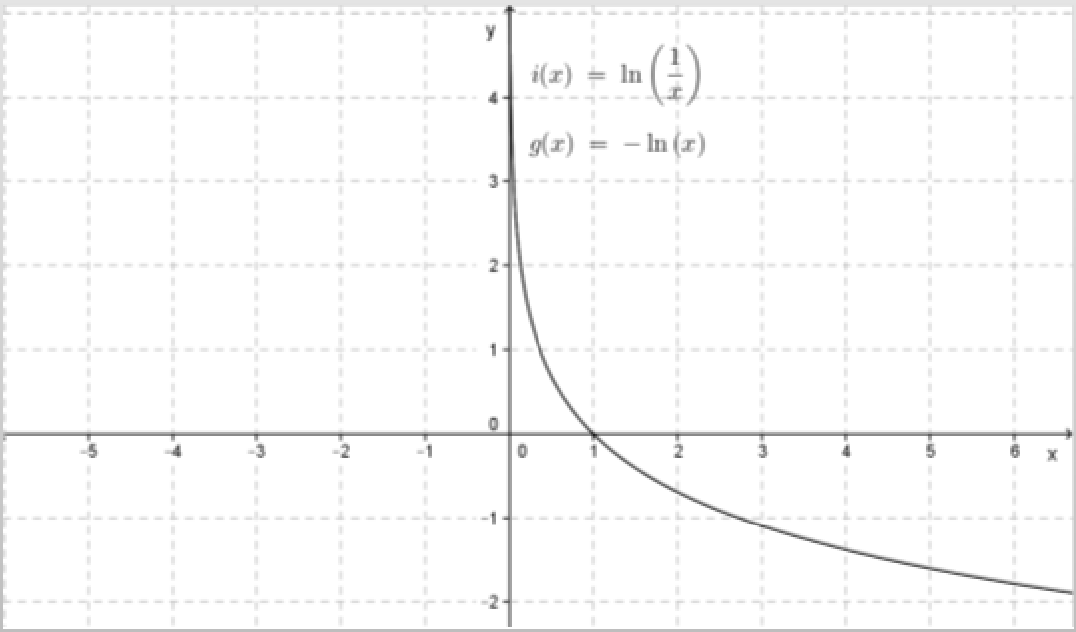
a)

Das Schaubild von $g(x) = -\ln(x)$ entsteht aus dem von $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$ durch Spiegelung an der x-Achse.

Das Schaubild von $h(x) = \ln(-x)$ entsteht aus dem von $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$ durch Spiegelung an der y-Achse.



b)
Es handelt sich um das gleiche Schaubild. Fazit: Spiegelung des Schaubildes der Funktion f mit f(x)=ln(x) an der x-Achse ist durch Hinzufügen eines negativen Vorzeichens oder durch Kehrwertbildung des Numerus möglich.



c)

$$f(x) = a\ ln(b(x-c)) + d$$

Streckung/ Stauchung in x-Richtung

Verschiebung in y-Richtung

Streckung in y-Richtung

Verschiebung in x-Richtung

Arbeitsauftrag 4:

1. $2\ln(x) - 2 = 0$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt **x = e**
2. $2 - \ln(x^2) = 0$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $x_{1/2} = \pm\sqrt{e^2}$
3. $(\ln(x) + 1)^2 = 9$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $x_1 = e^2$ oder $x_2 = e^{-4}$
4. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 8 = 0$ — Substitution und potenzieren mit Basis e ergibt $x_1 = e^4$ oder $x_2 = e^{-2}$
5. $xln(-x) - 4x = 0$ — Satz von Nullprodukt und potenzieren mit Basis e ergibt **x = -e⁴** $x = -e^4$
6. $6\ln(x) + (\ln(x))^2 = -5$ — Substitution und potenzieren mit Basis e ergibt $x_1 = e^{-1}$ und $x_2 = e^{-5}$
7. $2\ln(x) - 1 = \ln(x) + 3$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $x = e^4$

Arbeitsauftrag 5:

a) $f`(x) = -2 - \frac{1}{2x}$

b) $f`(x) = 4x - e + \frac{5}{x}$

c) $f`(x) = \frac{s}{x} + 5$

d) $f`(x) = \frac{6x}{x^2-4}$

e) $f`(x) = 1 + \frac{2}{x}$

f) $f`(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$

g) $f`(x) = \frac{4-4\ln(x)}{x^2}$

h) $f`(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) - 3)$

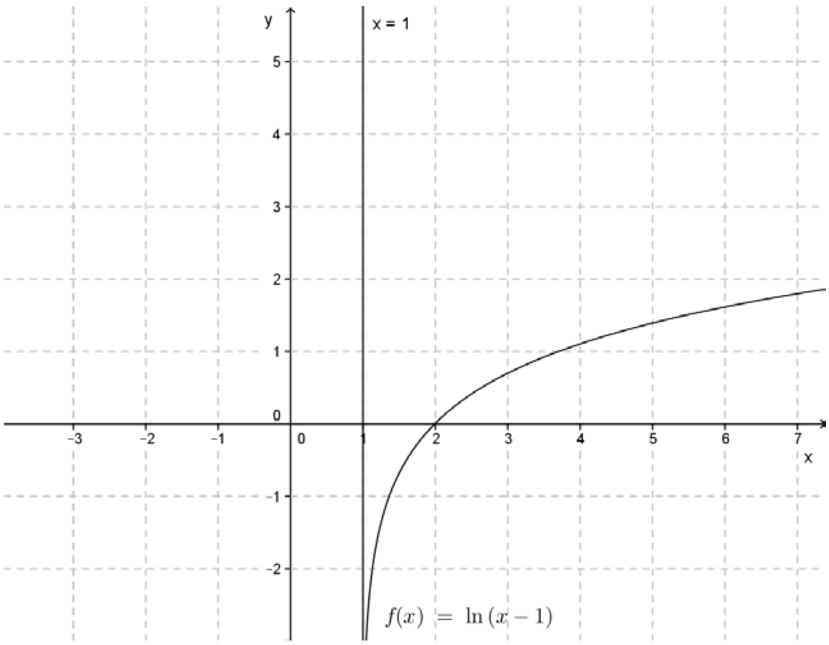
i) $f`(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x}$

j) $f`(x) = \frac{3x^2}{3x-4} + 2xln(3x-4)$

k) $f`(x) = \frac{2x^2(3\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2}$

Arbeitsauftrag 6:

a)



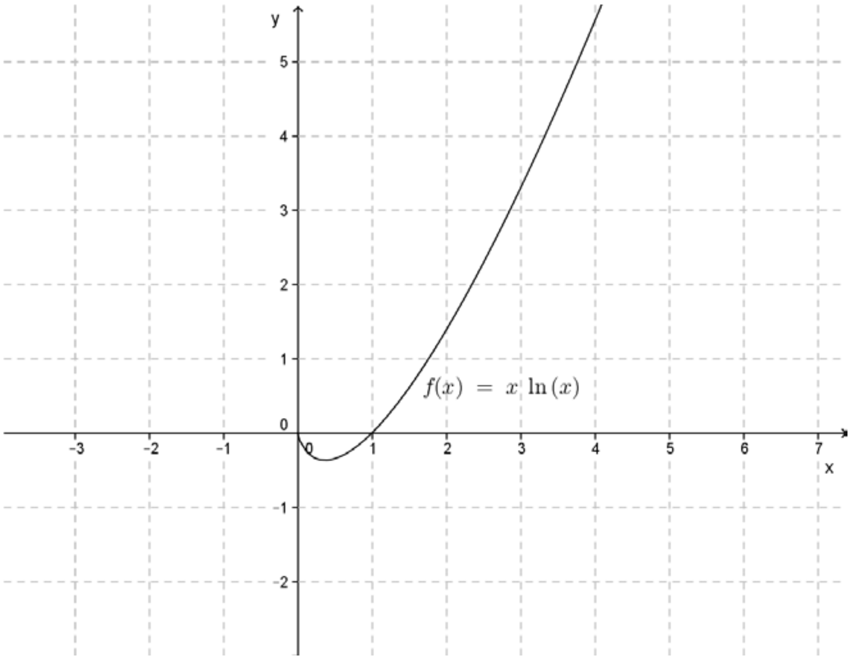
D=]1; ∞[

Randstelle x=1

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

Senkrechte Asymptote: x=1

b)



D=$]0;\infty[$

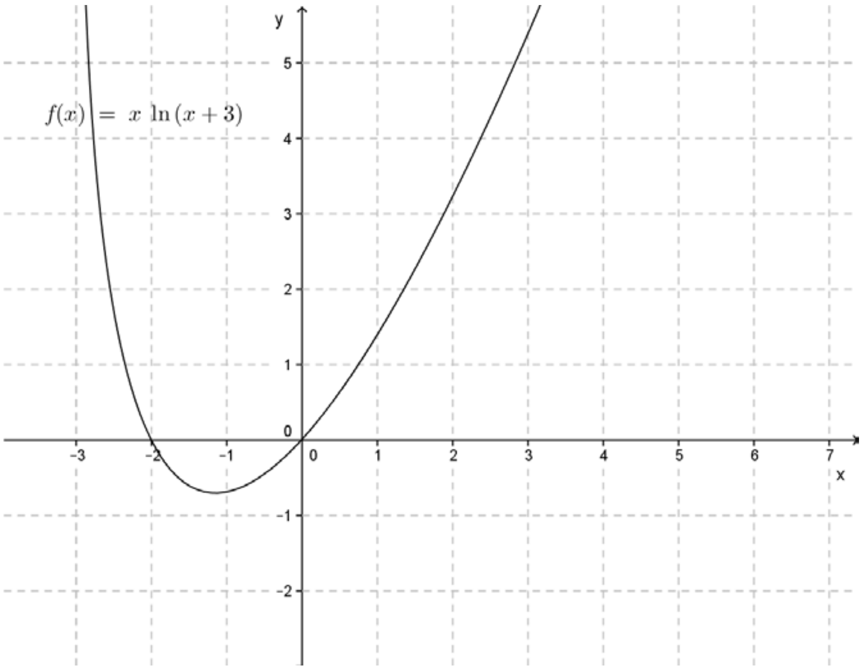
Randstelle x=0

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

x ist dominant

Keine Asymptote

c)



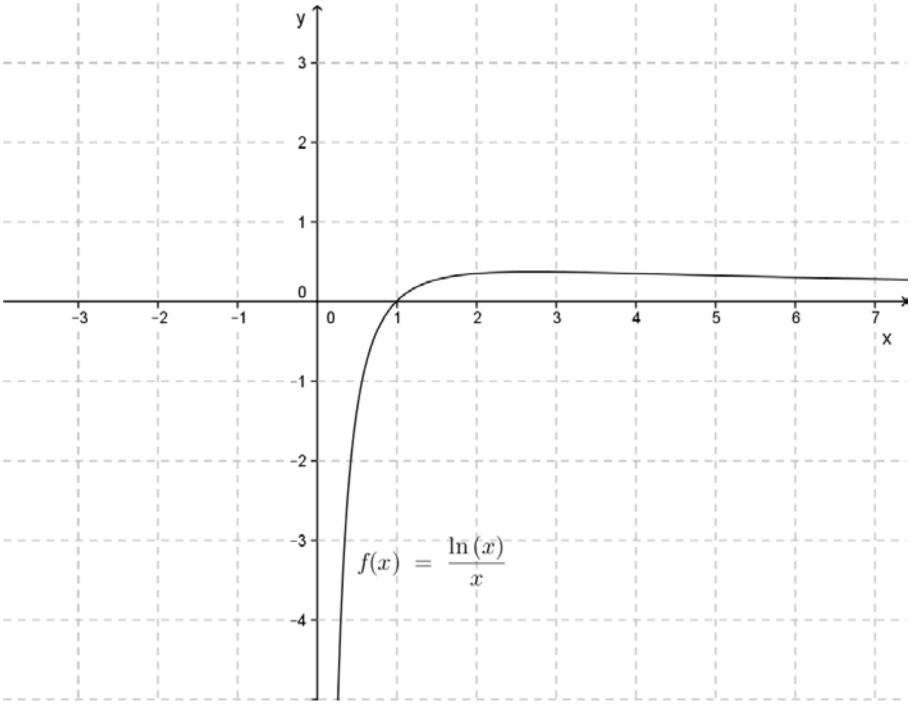
D=$]-3;\infty[$

Randstelle x=-3

$\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$

Senkrechte Asymptote:
x=-3

d)



D=$]0;\infty[$

Randstelle x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Senkrechte Asymptote: x=0

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$$

x dominiert

Waagrechte Asymptote: y=0

Arbeitsauftrag 7:

Schülerindividuelle Lösung

Arbeitsauftrag 8:

Definitionsbereich:
D=$]-\infty;1[$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
$f(x) = 0$ führt mit einigen Rechenschritten zu $\ln(1-x) = \pm 1$. Mit potenzieren zur Basis e erhält man $x_1 = 1 - e \quad \vee \quad x_2 = 1 - e^{-1}$.
Folglich $N_1(1-e|0)$ und $N_2(1-e^{-1}|0)$.
$f(0) = 1$, also $S_y(0|1)$

Asymptoten:
$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$
Senkrechte Asymptote: x=1

Extrem- und Wendepunkte:

$$f`(x) = \frac{2\ln(1-x)}{1-x} \qquad f``(x) = \frac{-2+2\ln(1-x)}{(1-x)^2}$$

$f`(x) = 0$ ergibt x=0 und $f``(0) = -2 < 0 \rightarrow HP$ $\quad f(0) = 1 \quad HP(0|1)$
$f``(x) = 0$ ergibt x=1-e, einfache Nullstelle daher VZW $\rightarrow WP$ $\quad f(1-e) = 0 \quad W(1-e|0)$

Didaktische Hinweise:

Die Logarithmusfunktionen sind in der Lehrplaneinheit 5 Funktionen und zugehörige Differentialrechnung als Themengebiet aufgeführt. Da etliche Funktionstypen im Fach Mathematik behandelt werden, kann die Erarbeitung der Logarithmusfunktion unter dem Gesichtspunkt des Transfers und der Selbsterarbeitung erfolgen. Ziele des Unterrichtsarrangements sind

- individuelle Auseinandersetzung mit den Lerninhalten,
- selbstständige Zeiteinteilung und damit Lernen im individuellen Lerntempo innerhalb eines vorgegebenen Zeitrahmens,
- individuelle Hilfe durch die Lehrperson während andere Schülerinnen und Schüler weiterarbeiten können.

Fokussiert wird folglich ein Training von selbstständigem und selbstverantwortlichem Lernen der Schülerinnen und Schüler.

Methodische Hinweise:

Die Gestaltung der Lernumgebung erfolgt unter Berücksichtigung der Handlungsorientierung mit folgenden Kriterien:

- Förderung von Wissenskomponenten,
- Aktivitätsschwerpunkt liegt auf Seiten der Schülerinnen und Schüler,
- offene Gestaltung der Lernumgebung

Die Schülerinnen und Schüler erschließen sich das Themengebiet mittels Arbeitsblättern mit „Infoboxen“ und Arbeitsaufträgen zum Explorieren. Im Anschluss an die Themenerkundung erfolgt jeweils eine Anwendung des neu erworbenen fachspezifischen Wissens in Übungsaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben durch eine eingerichtete Kontrollstation die Möglichkeit, Ihre Ergebnisse selbstständig zu überprüfen bzw. ggf. zu korrigieren. Die Lehrperson steht zudem als möglicher Ansprechpartner zur Verfügung.
Die zugrundeliegenden Aktionsformen sind erarbeitend und entdecken-lassend. Als Sozialform bietet sich die Partnerarbeit an.
Zum Abschluss der Schülerarbeitsphase könnte ein Austausch im Plenum zu dem neuen Funktionstyp sowie zu offenen Fragen erfolgen. Dies könnte insbesondere an Hand der Vorstellung einiger Vernetzungsdiagramme, wie sie in Aufgabe 7 zu erstellen sind, erfolgen.

Fachliche Hinweise:

Die Behandlung der zugehörigen Integralrechnung ist im Lehrplan im Rahmen der Lehrplaneinheit 6 vorgesehen, könnte jedoch unter thematischen Gesichtspunkten auch vorgezogen werden, falls die Integralrechnung im Fach Mathematik bereits behandelt wurde.

Die Unterrichtsmaterialien beziehen sich ausschließlich auf die natürliche Logarithmusfunktion. Die Betrachtung der Logarithmen zu anderen Basen kann im Nachgang bei der Besprechung im Plenum erfolgen.

Falls die Logarithmengesetze im Fach Mathematik nicht, oder nicht umfassend behandelt wurden, kann dies hier erfolgen.

Der früher oft eingesetzte Rechenschieber dessen Funktionsweise auf den Logarithmengesetzen beruht, bietet eine Möglichkeit, den Schülerinnen und Schülern eine Anwendung aufzuzeigen.

Unterrichtsmaterialien:

Arbeitsblätter mit Infoboxen, Arbeitsaufträgen, Übungsaufgaben

Lösungsblätter zum Aushang an einer Kontrollstation

Begriffskärtchen und leere Din A3-Blätter für die Erstellung eines Vernetzungsdiagramms (Conzept-Maps)

Weitere Materialien (Links):

Capira.de

- ➔ Unter „05: Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen“ findet man interaktive Videos zu „Logarithmen“, „Rechenregeln für Logarithmen und Logarithmen zu fremden Basen“
- ➔ Unter „10: Ableitungen“ findet man interaktive Videos „Ableitung von Sinus; Cosinus; Logarithmus; Potenzregel; Quotientenregel“

Aigner, Martin [Hrsg.]	Alles Mathematik	Braunschweig ; Wiesbaden : Vieweg	2004
Blatner, David	Pi	Rowohlt Verlag	2001
Colmez, Coralie/ Schneps, Leila	Wahrscheinlich Mord	Carl Hanser Verlag GmbH & Co.KG	2013
Drösser, Christoph	Der Mathematikverführer	Rowohlt Verlag	2008
Fuchs, Dmitry/ Tabachnikov, Serge	Ein Schaubild der Mathematik	Springer Verlag GmbH	2011
Häfner, Gert/ Süßbier, Siegfried	Das verrückte Mathe-Comic-Buch	Springer Spektrum	2012
Havil, Julian	Verblüfft?!	Springer Verlag GmbH	2009
Klein, Stefan	Alles Zufall	Rowohlt Verlag	2005
Krämer, Walter	Denkste	Piper Verlag	1998
Paenza, Adrian	Mathematik durch die Hintertür	Heyne, Wilhelm Verlag	2007
Peterson, Ivars	Mathematische Expeditionen	Springer Spektrum	1992
Pickover, Clifford A	Das Mathebuch	Bielo Verlagsgesellschaft mbH	2013
Sautoy, Marcus du	Eine mathematische Mystery Tour durch unser Leben	Beck, C.H. Verlag	2013
Singh, Simon	Fermats letzter Satz	Carl Hanser Verlag GmbH & Co.KG	1998
Singh, Simon	Geheime Botschaften	Carl Hanser Verlag GmbH & Co.KG	200
Stewart, Ian	Die Macht der Symmetrie	Springer Spektrum	2008
Stewart, Ian	Die wunderbare Welt der Mathematik	Piper Verlag	2006
Stewart, Ian	Meilensteine der Mathematik	Springer Spektrum	2009
Stewart, Ian	Warum (gerade) Mathematik?	Springer Spektrum	2007
Szpiro, George G	Das Poincare-Abenteuer	Piper Verlag	2008
Taschner, Rudolf	Der Zahlen gigantische Schatten	dtv Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG	2009
Ziegler, Günter M	Darf ich Zahlen?	Piper Verlag	2011
Ziegler, Günter M	Das Buch der Beweise	Springer Spektrum	2003