Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule

# Fächerübergreifend und fächerverbindend unterrichten

Heinrich Winter
Gerd Walther

SINUS-Transfer

**Grundschule**

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

G6

Mathematik

# Inhaltsverzeichnis



## Impressum

Heinrich Winter, Gerd Walther
Fächerübergreifend und fächerverbindend unterrichten

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule
Programmträger: Leibniz-Institut für die
Pädagogik der Naturwissenschaften und
Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de
© IPN, März 2006

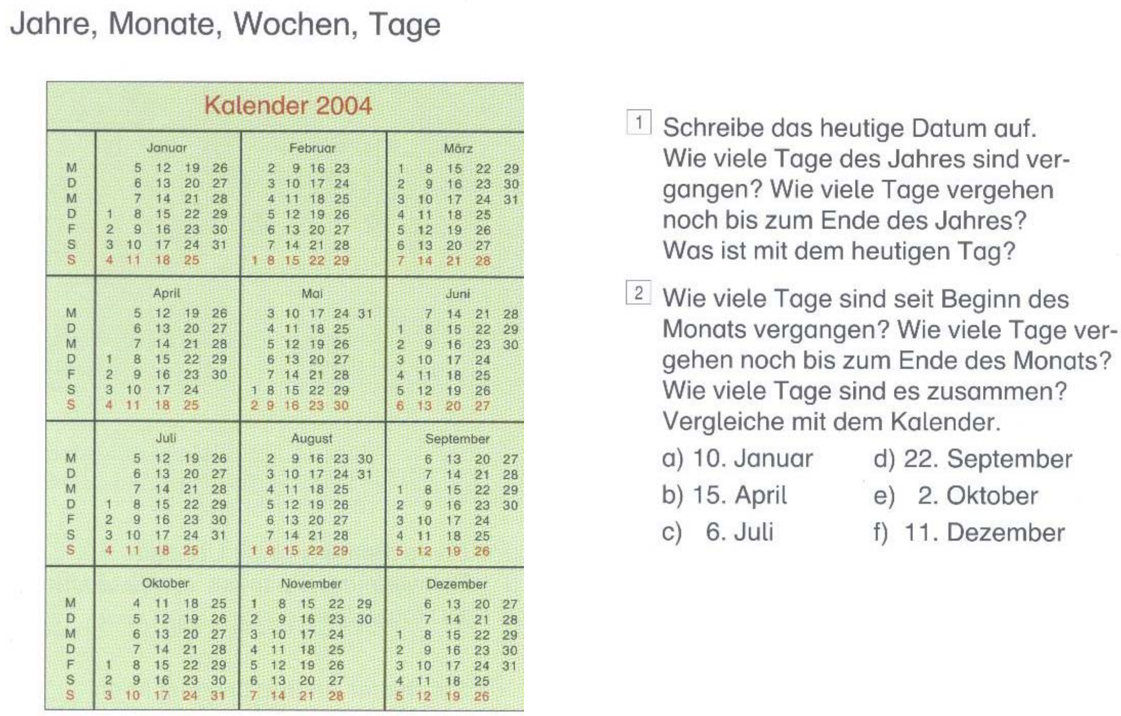
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Dr. Kirstin Lobemeier
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-185-0

## Nutzungsbedingungen

# 1 Einleitung

Bei der Durchsicht von Schulbüchern fiel uns die folgende Seite auf (im Original sind Kalender und die beiden Aufgaben untereinander angeordnet):



Jahre, Monate, Wochen, Tage

Kalender 2004

| | Januar | Februar | März |
|---|---|---|---|
| M | 5 12 19 26 | 2 9 16 23 | 1 8 15 22 29 |
| D | 6 13 20 27 | 3 10 17 24 | 2 9 16 23 30 |
| M | 7 14 21 28 | 4 11 18 25 | 3 10 17 24 31 |
| D | 1 8 15 22 29 | 5 12 19 26 | 4 11 18 25 |
| F | 2 9 16 23 30 | 6 13 20 27 | 5 12 19 26 |
| S | 3 10 17 24 31 | 7 14 21 28 | 6 13 20 27 |
| S | 4 11 18 25 | 1 8 15 22 29 | 7 14 21 28 |

| | April | Mai | Juni |
|---|---|---|---|
| M | 5 12 19 26 | 3 10 17 24 31 | 7 14 21 28 |
| D | 6 13 20 27 | 4 11 18 25 | 1 8 15 22 29 |
| M | 7 14 21 28 | 5 12 19 26 | 2 9 16 23 30 |
| D | 1 8 15 22 29 | 6 13 20 27 | 3 10 17 24 |
| F | 2 9 16 23 30 | 7 14 21 28 | 4 11 18 25 |
| S | 3 10 17 24 | 1 8 15 22 29 | 5 12 19 26 |
| S | 4 11 18 25 | 2 9 16 23 30 | 6 13 20 27 |

| | Juli | August | September |
|---|---|---|---|
| M | 5 12 19 26 | 2 9 16 23 30 | 6 13 20 27 |
| D | 6 13 20 27 | 3 10 17 24 31 | 7 14 21 28 |
| M | 7 14 21 28 | 4 11 18 25 | 1 8 15 22 29 |
| D | 1 8 15 22 29 | 5 12 19 26 | 2 9 16 23 30 |
| F | 2 9 16 23 30 | 6 13 20 27 | 3 10 17 24 |
| S | 3 10 17 24 31 | 7 14 21 28 | 4 11 18 25 |
| S | 4 11 18 25 | 1 8 15 22 29 | 5 12 19 26 |

| | Oktober | November | Dezember |
|---|---|---|---|
| M | 4 11 18 25 | 1 8 15 22 29 | 6 13 20 27 |
| D | 5 12 19 26 | 2 9 16 23 30 | 7 14 21 28 |
| M | 6 13 20 27 | 3 10 17 24 | 1 8 15 22 29 |
| D | 7 14 21 28 | 4 11 18 25 | 2 9 16 23 30 |
| F | 1 8 15 22 29 | 5 12 19 26 | 3 10 17 24 31 |
| S | 2 9 16 23 30 | 6 13 20 27 | 4 11 18 25 |
| S | 3 10 17 24 31 | 7 14 21 28 | 5 12 19 26 |

1 Schreibe das heutige Datum auf. Wie viele Tage des Jahres sind vergangen? Wie viele Tage vergehen noch bis zum Ende des Jahres? Was ist mit dem heutigen Tag?

2 Wie viele Tage sind seit Beginn des Monats vergangen? Wie viele Tage vergehen noch bis zum Ende des Monats? Wie viele Tage sind es zusammen? Vergleiche mit dem Kalender.

a) 10. Januar
b) 15. April
c) 6. Juli
d) 22. September
e) 2. Oktober
f) 11. Dezember

Abb. 1.1 Ausschnitt Schulbuchseite

Mit dem abgebildeten Kalender, der natürlich dem jeweiligen aktuellen Jahr anzupassen wäre, sind zwei Sachrechenaufgaben zu bearbeiten. Bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe können die Kinder je nach dem tatsächlich betrachteten Jahr z.B. herausfinden, dass dieses Jahr, falls es ein Normaljahr ist, 365 Tage hat, und, falls es ein Schaltjahr ist, wie das Jahr 2004, 366 Tage. Die zweite Aufgabe führt zu der Erkenntnis, dass das untersuchte Jahr Monate unterschiedlicher Länge aufweist: Monate mit 31 Tagen, wie der Januar, und solche mit 30 Tagen, wie der April. Der Monat Februar wird explizit nicht angesprochen.

Würde man sich im Unterricht nach diesen Ergebnissen gleich den nächsten Aufgaben, in denen der Kalender nicht mehr Gegenstand der Untersuchung ist, sondern z.B. Instrument zur Bestimmung der Dauer der Sommerferien, oder einem ganz anderen Thema zuwenden, so hätte man wertvolles Potenzial zum Modellieren, Mathematisieren, zur Verknüpfung von Sache und Mathematik, das in dem jeweiligen Jahreskalender „steckt“ gewissermaßen vor den Augen der Kinder verschenkt (vgl. Abschnitt 4 dieses Moduls).

Einige Stichwörter zum Potenzial der Kalender – Situation (in unsystematischer Reihenfolge); selbstverständlich können solche oder ähnliche Stichwörter, Fragen, Bemerkungen auch von Kindern kommen:

- Nutzen – Wozu sind Kalender gut?
- Elemente von Kalendern – Tag, Woche, Monat, Jahr als Zeitpunkte und Zeitspannen.
- Hintergründe von Kalenderelementen – Naturphänomene, Konventionen.
- Eigenschaften von und Beziehungen zwischen solchen Kalenderelementen.
- Strukturen in „unserem“ Kalender.
- Jahreszeiten und Kalender.
- Feste und „bewegliche“ Feiertage.
- Kultur (Sprache) und Kalender.
- Andere Kulturen, andere Kalender, usw.

Bereits Fragen danach, was eigentlich ein Tag, ein Monat, ein Jahr, ein Schaltjahr ist, führen sofort über numerische Feststellungen wie „Ein Tag hat 24 Stunden“ oder die „Knöchelregel“ für die Monatslängen etc. hinaus. Damit beispielsweise Schüler nicht nur die Schaltjahrregel *wissen*, sondern sie auch *verstehen* können, ist eine Modellbildung auf der Grundlage von (astronomischem) Sachwissen zur Dauer eines Sonnenjahres erforderlich. Dieses notwendige Sachwissen geht in der Regel über die Grundschulmathematik im Sinne des üblichen traditionellen Sachrechnens und häufig auch über das Alltagswissen hinaus. In manchen Fällen verfügen allerdings Grundschullehrkräfte über Mehrfachkompetenzen, die die Verbindung zwischen der mathematischen Betrachtungsweise und darüber hinaus gehenden Sachperspektiven erleichtern. Im anderen Fall könnten diese Sachperspektiven durch Kooperation mit einer oder mehreren interessierten Lehrkräften erarbeitet werden, die z.B. für den naturwissenschaftlichen Sachunterricht, für die Fächer Deutsch oder Religion zuständig sind und über die für das Thema erforderlichen Kompetenzen verfügen.

**Aktivität 1**. Stellen Sie sich vor, Sie wollten in Ihrem Mathematikunterricht das Thema Kalender, vielleicht angeregt durch das eine oder andere der genannten Stichwörter oder durch eigene Ideen, unter einer erweiterten Perspektive bearbeiten. Mit welchen Kolleginnen oder Kollegen würden Sie zusammenarbeiten? Welche Erwartungen hätten Sie an diese Lehrkräfte?

Die mehrperspektivische Bearbeitung des Themas (z.B. Kalender) kann nun in *einem* Fach erfolgen, indem die Grenzen des Faches, z.B. des Mathematikunterrichts in der genannten Weise, überschritten werden und die erweiterten Perspektiven aus anderen Fächern in den Mathematikunterricht eingebracht werden.

Eine andere Möglichkeit Mehrperspektivität bei der Behandlung eines Themas zu realisieren besteht darin, dass durch dieses gemeinsam interessierende Thema verschiedene Fächer „zusammengebracht“ werden, wobei das Thema (z.B. Kalender) zeitnah kooperierend in den verschiedenen Fächern unter der jeweiligen Fachperspektive bearbeitet wird.

Im ersten Fall sprechen wir von *fachübergreifendem* (gelegentlich auch: fächerübergreifendem) *Unterricht*, im zweiten Fall von *fächerverbindendem Unterricht*. In der pädagogischen Literatur finden sich zu diesen Begriffen vielfältige Beschreibungen (vgl. z.B. Beckmann 2003 und die dort angegebene Literatur). Gemeinsamer Kern sind wohl Aspekte der Ganzheitlichkeit, Mehrperspektivität und Bereicherung in der Auseinandersetzung mit Themen, die beim Zugriff allein aus *einem* Fach heraus in der Regel zu kurz kommen.

Beim *fachübergreifenden Unterricht* steht zunächst ein einzelnes Fach, z.B. Mathematik, gewissermaßen mit Leitfunktion, und darin ein Thema im Mittelpunkt. Die durch das betreffende Fach bestimmte und damit auch eingegrenzte Perspektive bei der Bearbeitung des Themas wird dabei in dem Fach mit Erkenntnissen und Methoden aus anderen Fächern verbunden. Durch Kooperation mit Lehrkräften anderer Fächer greift man bei der mehrperspektivischen Bearbeitung des Themas in *einem Fach* über dieses hinaus.

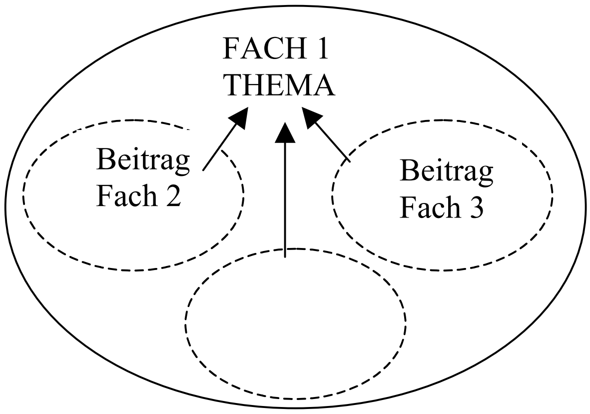



Abb. 1.2 Strukturbild zum fachübergreifenden Unterricht

Im Mittelpunkt des *fächerverbindenden Unterrichts* steht ein Thema, das aus der jeweiligen Perspektive der beteiligten Fächer zeitnah in *diesen Fächern* bearbeitet wird; das gemeinsame Thema *verbindet* verschiedene Fächer.

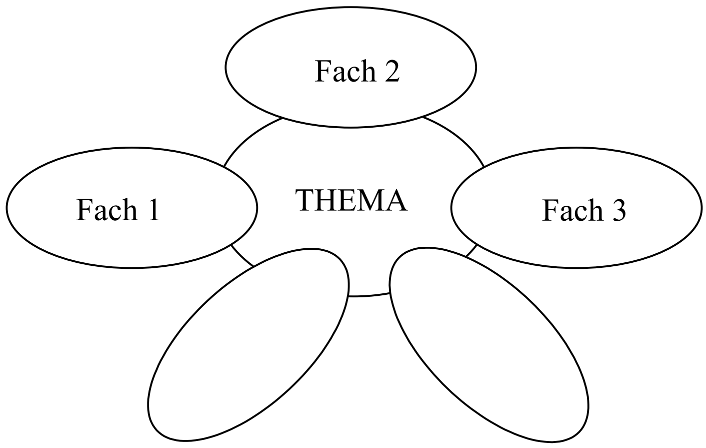



Abb. 1.3 Strukturbild zum fächerverbindenden Unterricht

Die fächerverbindende Arbeit an einem Thema werden wir, nachdem es dabei aus der Sicht des Mathematikunterrichts „nur“ um die mathematischen Aspekte des gemeinsamen Themas geht, in diesem Modul nicht weiter erörtern.

Nahezu alle Rahmenpläne und Lehrpläne der Bundesländer für das Fach Mathematik in der Grundschule enthalten explizit die Forderung nach fachübergreifendem und fächerverbindendem Arbeiten. Einige Bundesländer benennen hierfür geeignete Themen oder verweisen auf entsprechende Kooperationsfächer. Eine interessante Beleuchtung der Rolle der Fächer und des fachübergreifenden bzw. fächerverbindenden Unterrichts enthält das Gutachten zum SINUS Projekt in der Sekundarstufe I (vgl. Anhang).

Grundsätzlich kann im fachübergreifenden Unterricht jedes Fach die Leitfunktion bei einem bestimmten Thema, das zunächst aus diesem Fach erwächst, übernehmen. Wird beispielsweise im Deutschunterricht das bekannte Gedicht *Abendlied* von Claudius thematisiert

> Seht ihr den Mond dort stehen?
> Er ist nur halb zu sehen
> Und ist doch rund und schön.
> So sind wohl manche Sachen,
> Die wir getrost belachen,
> Weil unsre Augen sie nicht seh'n.
> (3. Strophe)

so könnte das Bedürfnis entstehen, darüber hinaus das Phänomen der Mondphasen aus der naturwissenschaftlichen Perspektive und damit verbundene numerische Bezüge aus mathematischer Sicht zu beleuchten.

Wegen der Ausrichtung des SINUS-Transfer Grundschule Programms auf den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht werden wir uns in diesem Modul vor allem auf fachübergreifendes Arbeiten im *Mathematikunterricht* konzentrieren, der bei der Auseinandersetzung mit einem Thema Leitfunktion übernimmt. Die nahe liegenden Bezugsfächer sind der Sachunterricht und der Deutschunterricht. Letzterer deshalb, weil gerade bei der Arbeit mit Themen aus mehrperspektivischer Sicht der Umgang mit fachsprachlichen Texten und damit Textverständnis eine große Rolle spielt. Hinzu kommen mündliches und schriftliches Darstellen von Ergebnissen, sprachliches Kommunizieren und Argumentieren.

Für die Kinder ergibt sich im fachübergreifenden Mathematikunterricht durch den erweiterten Kontext, durch den „Reiz der Sache“, eine Bereicherung. Der Sachunterricht wiederum wird durch die Möglichkeit bereichert, in substantieller Weise Sachverhalte mit Mitteln der Mathematik aufzuklären und verstehbar zu machen.

Damit ließe sich dann in natürlicher Weise eine der drei zentralen Forderungen an mathematische Grundbildung (Winter 1995) einlösen, wonach der Mathematikunterricht die Grunderfahrung ermöglichen solle, Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen.

Für das Sachrechnen würde dies bedeuten, dass von seinen drei miteinander verknüpften Funktionen (Winter 1992):

- Sachrechnen als Lernstoff: Erwerb von Kenntnissen über Größen und den rechnerischen Umgang mit ihnen,
- Sachrechnen als Lernprinzip: Stiftung von Sinn und Verständnis mathematischer Begriffsbildungen durch Bezugnahme auf umweltliche Phänomene und alltägliche Erfahrungen,
- Sachrechnen als Lernziel: Stiftung eines rationalen Verständnisses von Erscheinungen der Welt durch die Bildung von mathematischen Modellen,

insbesondere die zuletzt genannte Funktion im Vordergrund stünde.

**Aktivität 2**. Ein Blick auf den obigen Kalender zeigt eine Auffälligkeit bei den Wochentagen des Januar, April und Juli. Versuchen Sie diese „Erscheinung“ mathematisch zu erklären.

*Das Ziel*, Mathematik in einem fachübergreifenden Ansatz vor allem als flexibles Werkzeug zur Aufklärung von verschiedenen Erscheinungen unserer Lebenswelt kennen zu lernen werden wir in diesem Modul exemplarisch an drei Themen illustrieren:
**„Maus und Elefant“** stellt Bezüge zwischen Biologie und Mathematik her (Deutsch ist bei allen Themen mit dabei),
**„Münzgeld – wie gut ist unser Münzsystem?“** verknüpft wirtschaftliche und soziale Lebenspraxis mit Mathematik,
**„Der Kalender - zwischen Bürgeranspruch und Himmelsgesetzen“** ist ein unerschöpfliches Feld, Zusammenhänge zwischen dem sozialen Konstrukt „Kalender“ und astronomischen Phänomenen mit mathematischen Mitteln zu verstehen.
*Den Weg*, fachübergreifend Mathematik zu unterrichten können wir nicht weisen – nicht einmal bei den in diesem Modul vorgeschlagenen Themen. Dazu hängt dieser Ansatz viel zu stark von der in Mathematik unterrichtenden Lehrkraft, ihren Kooperationspart-

nern an der Schule, den Interessen und Kompetenzen der Akteure, den in der Klasse und an der Schule gegebenen Bedingungen ab. Wir wünschen uns selbstverständlich Lehrkräfte, die durch unsere Ausführungen zu den drei Themen neugierig geworden sind und sich zusammen mit anderen Kolleginnen und Kollegen oder durch ergänzende Literatur ihren *eigenen Weg* im Mathematikunterricht schaffen. Kein Thema, das sei hier ausdrücklich angemerkt, ist ein Selbstläufer für den Unterricht. Das Thema als Text, im Schulbuch (s.o.) oder hier in der Modulbeschreibung ist wohl zu unterscheiden von seiner Realisierung im Unterricht. Erst durch die Lehrkraft, aber auch durch die Kinder im Mathematikunterricht kann das in Texten zu einem Thema steckende fachliche und fachübergreifende Potenzial lebendig werden. Dies ist eine vergleichbare Situation wie bei den „Guten Aufgaben“ in Modul 1.

In den Ausführungen zu den drei Themen sind an einer Reihe von Stellen deutlich „Aufgaben“ im gewohnten Format und Sinn für Schülerinnen und Schüler zu erkennen. Andere Passagen in der Darstellung der Themen sind eher narrativ oder primär informierend. Auf der Grundlage dieser Textpassagen können jedoch Aufgaben formuliert werden.

Ein Beispiel hierzu mit Bezug zum Fach Deutsch. Beim Thema „Maus und Elefant …“ wird die Bedeutung der drastisch differierenden Gewichte beschrieben (vgl. Abschnitt 2.2). Dazu könnte man z.B. folgende Aufgabe formulieren:

Finde weitere Eigenschaften, die eher zur Maus bzw. eher zum Elefanten passen

| **Maus** | **Elefant** |
|---|---|
| dünnbeinig | behäbig |
| | |
| | |

Sortiere die gefundenen Eigenschaften nach Gemeinsamkeiten bzw. Unterschieden.

**Aktivität 3**. Stellen Sie die im Text formulierten Aufgaben zusammen. Entwickeln Sie aus den beschreibenden Textpassagen zu den drei Themen Aufgaben. Überprüfen Sie an den Aufgaben die Kriterien zur Konstruktion und Realisation „guter Sachaufgaben“ (Winter 2003):

1. Gute Sachaufgaben erwachsen aus einer Thematik, die Neugier und Interesse wecken kann, die Schülerinnen und Schüler etwas bedeutet.
2. Gute Sachaufgaben animieren zum sachorientierten Handeln, insbesondere zum Experimentieren und Explorieren.
3. Gute Sachaufgaben sind mit grundlegenden mathematischen Ideen verbunden bzw. verbindbar.
4. Gute Sachaufgaben stimulieren Modellbildung, das Deuten und Verstehen von Sachsituationen im Lichte mathematischer Begriffe.
5. Gute Sachaufgaben vertiefen und vermehren das Wissen über Phänomene unserer Welt (Aufklärung) und formen unsere alltäglichen Denk- und Sprechweisen.
6. Von guten Sachaufgaben gehen Anstöße zu Variationen und Übertragungen auf andere Sachsituationen aus.
7. Gute Sachaufgaben sind problemhaltig oder können zu problemhaltigen Aufgaben weiter entwickelt werden, die Gelegenheit verschaffen, heuristische Vorgehensweisen gezielt zu kultivieren.

Untersuchen Sie auch welche inhaltlichen und allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen im Sinne der Bildungsstandards bzw. der Module 1 und 2 durch die Aufgaben gefördert werden können.

# 2 Maus und Elefant – warum die Maus relativ mehr frisst als der Elefant

„Der Elefant, grau wie ein Stein
hat Zähne ganz aus Elfenbein.
Wie ein Gebirg geht er herum.
Zehn Männer werfen ihn nicht um“. (J. Guggenmos)

In diesem ersten Beispiel sollen – eher implizit – einige wichtige Züge eines fächerübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts aufgezeigt werden.
Das genuin **biologische Thema** Maus und Elefant (Musterbeispiele für klein und groß in der Tierwelt) halten wir für ein bedeutsames Thema, ein Thema, das zum Standard von Allgemeinbildung gehört, falls dabei das zweifellos anspruchsvolle Ziel angestrebt wird, Schülerinnen und Schülern erste Einblicke in grundlegende biologische Sachverhalte zu ermöglichen, und nicht nur, wie bisher üblich, nur Größenvergleiche mit gegebenen Daten anzustellen, seien diese auch noch so sensationell.
Von den vielen möglichen Fragestellungen greifen wir im Wesentlichen nur eine heraus, die durch 4 Angaben gekennzeichnet ist:

| | **Maus** | **Elefant** |
|---|---:|---:|
| **Körpergewicht** | 30 g | 6000 kg |
| **Gewicht der täglichen Nahrung** | 12 g | 300 kg |

Das Problem lautet: Wie ist das zu verstehen, dass die Maus verhältnismäßig mehr frisst als der Elefant?
Im Zuge der Entwicklung und eingeschränkten Lösung dieser Problemstellung ergeben sich Aspekte der Physik, der Chemie, der Medizin, der Ernährungswissenschaft, auch der Umwelt- und Entwicklungspolitik, ja sogar der Philosophie und Religion. Leider müssen wir uns hier auf Andeutungen beschränken. Das Hauptmittel der Erkenntnis wird aber die Mathematik (Arithmetik, Geometrie, Sachmathematik) sein, und in stän-

diger Verbindung mit ihr die deutsche Sprache als **das** Medium der Beschreibung und des Verstehens.

Dass Grundschulkinder in aller Regel am Tierleben interessiert sind, sich z.T. sogar zu „lokalen Experten“ (Wittmann 1977) etwa über Pferde, Elefanten oder Dinosaurier heraus bilden, ist ein zusätzliches Motiv für die Wahl unseres Themas.

### 2.1 Die leichte Maus, der schwere Elefant

Zunächst ist zu klären, dass die Angaben über die beiden Körpergewichte (Maus 30 g, Elefant 6 000 kg) nur ungefähre Höchstwerte (von Hausmaus und afrikanischem Elefant) sind und dass in der Literatur unterschiedliche Daten genannt werden (z.B. bei Slijper 1967, Flindt 1988, Pflumer 1989). Uns soll es jetzt darauf ankommen, den nackten Zahlen Leben ein zu hauchen.

Wir fordern die Kinder auf, Gewichtsgeschichten zu erzählen und aufzuschreiben, also die beiden Quantitäten mit Qualitäten aufzuladen, etwa:

Ich könnte viele Mäuse in einem Käfig tragen, aber ich könnte nicht einmal einen Stoßzahn eines Elefantenbullen hochheben. – Wenn mir eine Maus über den nackten Fuß liefe, merkte ich das kaum, aber wehe mir, wenn mein Fuß unter den eines Elefanten geriete – auch wenn der Elefant mit seinen riesigen Fußsohlen, zusammen rd. 1 qm, den Druck nach unten mildern kann. – Eine Maus kann über morastigen Boden hinweg huschen, ein Elefant würde eher einsinken, trotz seiner Fußsohlen. – Wenn eine Maus in eine tiefe Grube fällt, passiert ihr gar nichts, für den Elefanten könnte es der Tod sein. – Die unersetzbare Bedeutung durch Schüler verfasster Entdeckungs- und Erfahrungstexte wird heute mehr und mehr anerkannt. Viele überzeugende Anregungen findet man in den Schriften von P. Gallin und U. Ruf, die uns dafür die Augen geöffnet haben.

Nun zur Numerik der Gewichtswerte. Es sollte vorab geklärt werden, dass ein subtraktiver Vergleich gänzlich unpassend wäre. Der multiplikative Vergleich kann durch die Frage „Wie viele Mäuse wiegen zusammen so viel wie ein Elefant?“ angeregt und schrittweise aufbauend etwa so gelöst werden:

| **Anzahl der Mäuse** | 1 | 2 | 10 | 20 | 2000 | 200000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Gesamtgewicht der Mäuse** | 30 g | 60 g | 300 g | 600 g | 60 kg | 6000 kg |

Der Elefant ist so schwer wie 200 000 Mäuse zusammen. Denkt euch eine riesige Waage aus, in der einen Schale 1 Elefant, in der anderen 200 000 Mäuse.
Es empfiehlt sich, den gewaltigen Gewichtsunterschied der Anschauung noch weiter zugänglich werden zu lassen:
Die Maus ist so schwer wie ein (stark) gehäufter Esslöffel Zucker, der Elefant ist so schwer wie 6000 Pakete von je 1 kg Zucker. – Die Maus ist so schwer wie ein kleiner Notizblock, der Elefant wiegt so viel wie 6000 dicke Bücher. – Die Maus ist so schwer wie 4 1-Euro-Münzen, der Elefant ist so schwer wie 800 000 solcher Münzen. – Ein kräftiger 10 Jahre alter Junge wiegt 30 kg, also so viel wie 1000 Mäuse, und ein Elefant wiegt so viel wie 200 10-jährige Jungen (der Mensch also zwischen Maus und Elefant) usw.
Stellt die beiden Gewichtswerte anschaulich dar. Benutzt Millimeterpapier und legt fest: 1 Quadratmillimeter soll ein Gewicht von 300 g darstellen. Am besten, ihr macht ein Poster zum Thema Maus und Elefant, mit Bildern, Zahlen und Texten.

## 2.2 Gewicht und Rauminhalt

**Welche Bedeutung hat die Unterschiedlichkeit der Gewichte?**

Klar ist allen zunächst, dass der Elefant sehr viel **größer** ist als die Maus, er ist bedeutend höher, breiter (dicker) und länger als die Maus. Das wissen wir aus eigener direkter Wahrnehmung oder aus anderen Quellen; zunächst ohne Bezugnahme auf das Gewicht. Jetzt spätestens ist die Gelegenheit, dieses Vorwissen zu thematisieren. Eine spezielle Sprach-Übung dazu: Welche der folgenden Eigenschaften passen eher zur Maus, welche eher zum Elefanten?
Schwerfällig, dünnbeinig, feingliedrig, massig, wuchtig, wendig, langlebig, tapsig, zierlich, kolossal, grobschlächtig, flink, langsam, behäbig, schlank, dickbeinig, behaart, kahl, kurzlebig, ...
In einer weiteren Übung sollen geeignete Größenvergleiche gefunden werden, z.B.: Die Maus gehört ins Reich Liliput, der Elefant ins Reich Brobdignag. – Die Maus passt in eine kleine Schachtel, dem Elefanten wäre ein normales Zimmer zu klein. – Die Maus flüchtet bei Gefahr in ihr Mauseloch: hier entpuppt sich Kleinsein als Vorteil. Der Elefant hat außer dem Menschen keine Feinde, er benötigt kein Schlupfloch und hat auch keines: hier erweist sich Großsein als Vorteil, usw.

Aber, was ist eigentlich *groß*? Zur Präzisierung lassen wir uns auf die Geometrie einfacher Körper ein, es genügen Quader und Würfel als spezielle Quader, und gehen dabei konstruktiv und handgreiflich vor. Wir benutzen deckungsgleiche Würfel als Bausteine und bauen aus ihnen alle möglichen verschiedenen Quader. Wie viele verschiedene Quader gibt es z.B. aus 24 solcher Würfel? (Abb. 2.1). Das Lösen und Besprechen der 6 Lösungen führt u.a. fast zwangsläufig zur Dreidimensionalität des Raumes: Länge (von links nach rechts), Breite (von vorn nach hinten), Höhe (von unten nach oben) und zum Begriff des **Rauminhalts**, hier als die Anzahl der gleichen Würfelbausteine.

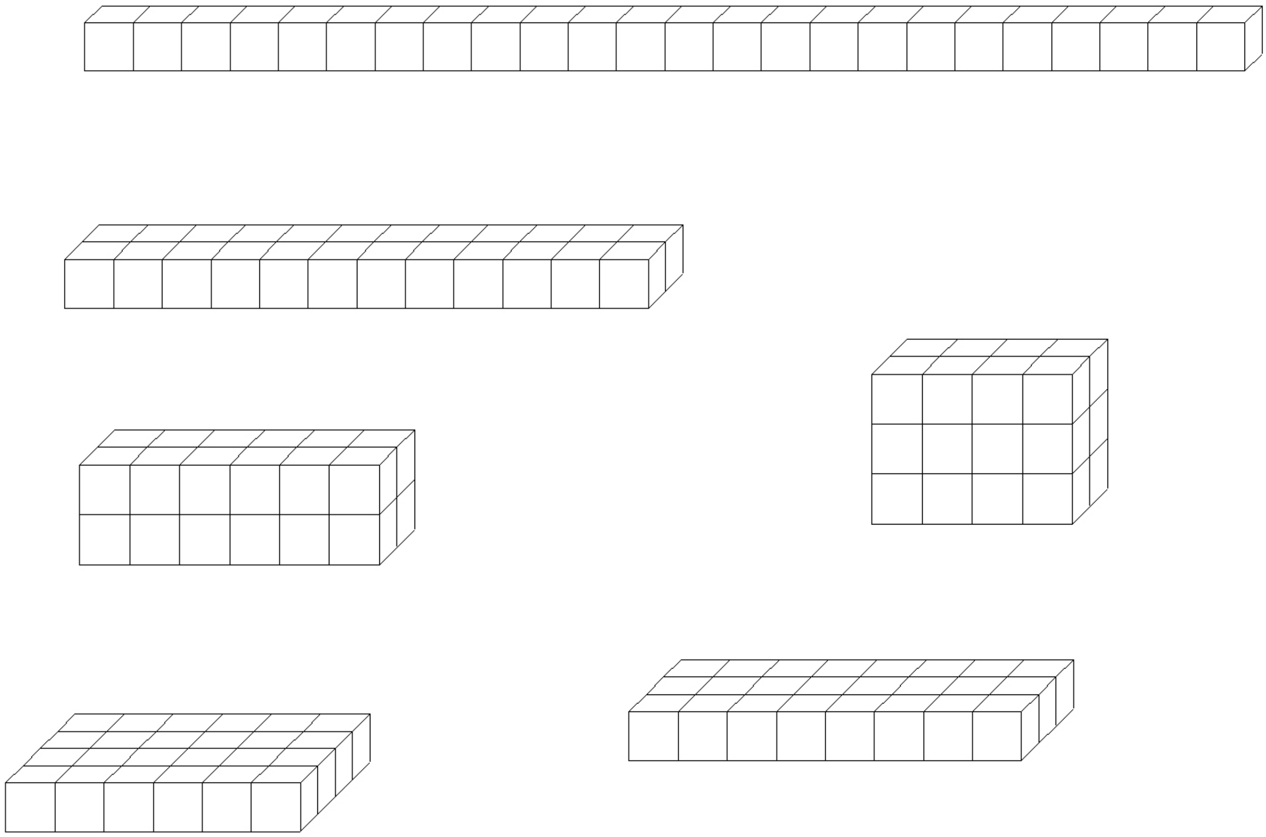


Abb. 2.1 Sechs verschiedene Quader mit gleichem Rauminhalt (24 Messwürfel)

Und worin unterscheiden sich die Quader? Stellt euch vor, das seien Tiere, die ja eine Haut haben! Da sprechen wir die **Oberfläche** an, deren Größe wir wiederum durch (geschicktes) Abzählen bestimmen können. Wir können also – außer Längen – zweierlei Größe bei Körpern/Tieren unterscheiden: Rauminhalt und Oberflächeninhalt.

Welchen Rauminhalt haben nun Maus und Elefant? Wie können wir ihren Rauminhalt messen? Die Tiere haben ja nicht die Form von Quadern.
Mit geeigneten Impulsen können die Schüler die Eintauchmethode nachentdecken: Der zu vermessende, genügend kleine Körper wird in ein mit Wasser teilgefülltes skaliertes Messglas (aus der Küchenausrüstung) getaucht. Der Rauminhalt kann dann als Pegel-Unterschied unmittelbar abgelesen werden.
Wie kannst du mit dieser Methode den Rauminhalt deines eigenen Körpers messen?
Bei Tieren, vor allem beim Elefanten, wird diese Methode schon recht schwierig, man braucht ein genügend großes „Messglas", vielleicht einen Swimmingpool? Oder geht es anders?

Die Mitteilung an die Schüler, man brauche, um den Rauminhalt eines Tieres zu bestimmen, überhaupt nicht zu messen, man brauche nur sein Gewicht zu kennen, denn **jedes Gramm Tiergewicht habe in guter Näherung einen Rauminhalt von einem Kubikzentimeter.** Demnach hat die Maus etwa 30 Kubikzentimeter (Milliliter) und der Elefant etwa 6 000 Kubikdezimeter (Liter) Rauminhalt. Da gibt es aber hoffentlich Nachfragen!
Zu klären sind zwei Dinge:

1) Wieso hat jedes Gramm eines Tierkörpers angenähert denselben Rauminhalt?
2) Wieso beträgt dieser Rauminhalt ungefähr 1 Kubikzentimeter ($1\mathrm{cm}^3$)?

Zu 1): Könnte es nicht sein, dass die kleine Maus ganz anders zusammengesetzt ist als der große Elefant? Jetzt sind wir in der Physik, nämlich auf dem Wege zum Begriff des **spezifischen Gewichts** (1 Kubikmeter Styropor ist leichter als 1 Liter Eisen), brauchen jedoch hier noch keine Explikation. Dafür, dass Maus und Elefant im wesentlichen aus demselben Stoff bestehen, sprechen die folgenden Gemeinsamkeiten, die die Schüler sammeln können: beide sind Landtiere, Säugetiere, Vierbeiner, beide haben Sinne (Augen, Ohren, ...), innere Organe (Herz, Magen, ...), Knochengerüst, Muskeln, Blutadern, usw.
Zu 2): Die Behauptung besagt ja, dass Maus und Elefant aus einem „Stoff" bestehen, der denselben Rauminhalt besitzt wie gewöhnliches Wasser gleichen Gewichts. Mit 1 g Wasser kann man einen Würfel von 1 cm Kantenlänge füllen. Das ist, nebenbei bemerkt, eine mögliche Definition von Gramm. Für die Behauptung: (spezifisches) Tier-

gewicht = Wassergewicht spricht, dass alle Tiere – wir Menschen eingeschlossen – zum überwiegenden Teil aus Wasser bestehen (hier streifen wir die Chemie), und dass fast alle Säugetiere von Natur aus schwimmen können, nur Menschen und höhere Affen müssen es lernen, eigenartig? Welchen Vorteil hat es für ein Landtier, (notfalls) auch schwimmen zu können?

Wenn du also 30 kg wiegst, dann bist du rund 30 Liter groß. Ganz genau ist das freilich nicht, dein Rauminhalt ist etwas kleiner als 30 Liter, weil wir nämlich (spezifisch) etwas schwerer als (gewöhnliches) Wasser sind. Das liegt vor allem an unseren Knochen, die (spezifisch) deutlich schwerer sind als Wasser. Die Maus hat einen geringeren Anteil, der Elefant einen größeren Anteil an Knochen als wir Menschen, deshalb muss er sich in tiefem Wasser recht anstrengen, oben zu bleiben. Der lange Rüssel ist sehr hilfreich, die Verbindung mit der Luft zu halten, also zu atmen.

### 2.3 Die kleine Maus frisst eigentlich viel mehr als der Elefant

Jedes Tier muss regelmäßig Nahrung aufnehmen, essen und trinken, das ist vollkommen klar. Klar ist auch – zumindest auf den ersten Blick – dass große Tiere mehr Nahrung aufnehmen als kleine. Aber die Zahlen – Maus 12 g Nahrung pro Tag, Elefant 300 kg Nahrung pro Tag – animieren doch zum Nachdenken. Hättest du das erwartet?

Wir erinnern an die Körpergewichte. Der Elefant ist rund 200 000-mal so schwer wie die Maus, aber, so rechnen wir jetzt aus, seine Tagesration wiegt „nur“ rund das 25 000-fache der Tagesration der Maus. Dabei frisst der Elefant kalorienarmes Blattwerk, die Maus am liebsten kalorienreiche Körner.

Also: Die Maus frisst eigentlich/verhältnismäßig/vergleichsweise/relativ mehr als der Elefant, wenn wir ihre Rauminhalte oder Körpergewichte einbeziehen. Präziser: Das tägliche Fressgewicht pro 1 g Körpergewicht (oder pro 1 Kubikzentimeter Rauminhalt) beträgt bei der Maus etwa 0,4 g, beim Elefanten aber nur 0,05 g.

Wie soll man das verstehen? Besteht der Elefant vielleicht doch aus anderen Stoffen?

Wir fragen zunächst: Warum nehmen Tiere und auch wir überhaupt regelmäßig Nahrung zu uns?

Erfahrungsgemäß kommen Kinder und Erwachsene i. Allg. rasch auf die Analogie zum Auto: Die „Nahrung“ des Autos ist das Benzin bzw. der Treibstoff; dieser wird beim Fahren verbraucht, verbrannt, so dass immer wieder neu getankt werden muss.

Das ist tatsächlich eine belastbare Analogie (obwohl sie total ungenetisch ist), und könnte zur Entwicklung einer Gegenüberstellung einladen, etwa so:

| **Auto** | **Tier** |
|---|---|
| Benzin tanken | Nahrung aufnehmen |
| Benzin wird zerstäubt zu Gas | Nahrung wird zerkleinert und zersetzt |
| Luft wird zugeführt | Säfte und Sauerstoff werden zugeführt |
| Gas-Luft-Gemisch verbrennt | Nahrung wird verdaut (Stoffwechsel) |
| Hitze entsteht und der Kolben im Motor wird bewegt | Wärme entsteht, Bewegungen werden möglich und Zellen gebildet |
| Abgase werden ausgestoßen | Unbrauchbares wird ausgeschieden |
| bei Kälte höherer Benzinverbrauch | bei Kälte größerer Hunger |
| bei hoher Belastung hoher Benzinverbrauch | bei Schwerarbeit großer Hunger |

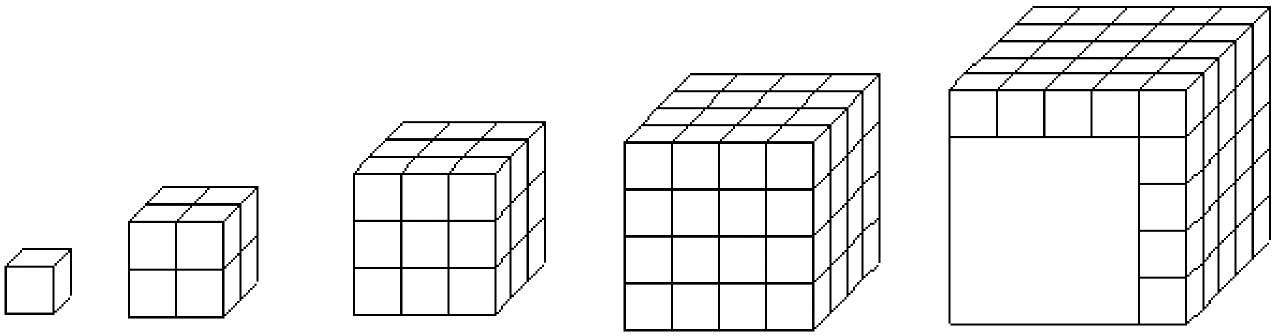
Die Analogie ist indes keineswegs universell. Sie versagt gänzlich, wenn wir die Existenzweisen ins Spiel bringen. Das „tote“ Auto verbraucht im Ruhezustand keinerlei Kraftstoff, während das lebendige Tier auch im Ruhezustand tätig ist, z.B. den Blutkreislauf aufrecht erhält und – bei den Säugetieren und Vögeln – für die Erhaltung einer konstanten Körpertemperatur (Maus 38 °C, Elefant 36 °C) sorgt (Grundumsatz). Außerdem wächst das „tote“ Auto nicht, und es hat zur Freude der Werkstätten keine Selbstheilungskräfte.

Liefert die Analogie Auto – Tier etwas für die Beantwortung unserer Hauptfrage, warum die Maus eigentlich mehr frisst als der Elefant? Wir könnten es versuchen.

### 2.4 Kleine und große Würfeltiere

Hier wollen wir aber anders vorgehen, nämlich geometrisch. Wir stellen uns vor, beide Tiere hätten dieselbe Gestalt (das ist eine enorme Vereinfachung, die aber doch zu einer wichtigen Aussage über die Realität führt), und zwar die besonders einfache Gestalt von Würfeln. Die Maus sei 27 Kubikzentimeter groß, also durch einen kleinen Würfel der Kantenlänge 3 cm dargestellt; der Elefant sei 5 832 000 Kubikzentimeter groß, also durch einen mächtigen Würfel der Kantenlänge 180 cm dargestellt. Was unterscheidet die beiden?

Um das zu studieren, gehen wir systematisch vor und lassen Würfel wachsen (Abb. 2.2).



Vom Vierer-Würfel zum Fünfer-Würfel.

Rauminhalt wächst um $3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 61$ ($cm^3$)

Oberfläche wächst um $12 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 = 54$ ($cm^2$)

Abb. 2.2 Wachsen von würfelförmigen (Modell-)Tieren

Denken wir nun daran, dass die Tiere eine hohe Körpertemperatur behalten müssen, meistens höher als die der umgebenden Luft, so richtet sich das Augenmerk auf die **Haut** der Tiere.

Je größer die Hautfläche nämlich ist im Vergleich zum Inneren (dem Rauminhalt) und je kälter die Luft ist, umso mehr gibt das Tier Wärme an die umgebende Luft ab. Es kühlt so rasch ab wie heiße Suppe, die man in ganz flache Teller gießt. Die Größe der Haut ist der **Oberflächeninhalt** unserer Würfeltiere. Wir entdecken in Abb. 2.2 und der zugehörigen Tabelle, dass der Rauminhalt deutlich rascher wächst als der Oberflächeninhalt.

| **Kantenlänge** | 1 cm | 2 cm | 3 cm | 4 cm | 5 cm | 6 cm | 7 cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rauminhalt** | 1 $cm^3$ | 8 $cm^3$ | 27 $cm^3$ | 64 $cm^3$ | 125 $cm^3$ | 216 $cm^3$ | 343 $cm^3$ |
| **Oberflächeninhalt** | 6 $cm^2$ | 24 $cm^2$ | 54 $cm^2$ | 96 $cm^2$ | 150 $cm^2$ | 216 $cm^2$ | 294 $cm^2$ |

Beim Würfel mit 1 cm Kantenlänge kommen auf 1 Kubikzentimeter Rauminhalt 6 Quadratzentimeter Hautfläche, beim Würfel mit 6 cm Kantenlänge kommt auf 1 Kubikzentimeter Rauminhalt nur noch 1 Quadratzentimeter Hautfläche. – Und wie ist es beim Würfel mit 60 cm Kantenlänge? – Und wie beim Elefantenwürfel mit der Kantenlänge 180 cm? – Und was kannst du an den Quadern von Abb. 2.1 Neues über das Verhältnis Rauminhalt – Oberflächeninhalt entdecken?

Wir halten fest:

| | **Würfelmaus** | **Würfelelefant** |
|---|---|---|
| Rauminhalt | 27 $cm^3$ | 5 832 000 $cm^3$ |
| Oberflächeninhalt | 54 $cm^2$ | 194 400 $cm^2$ |
| Oberflächeninhalt pro 1 Kubikzentimeter Rauminhalt | 2 $cm^2$ | 30. Teil von 1 $cm^2$ |

Die Haut pro Kubikzentimeter Rauminhalt der Würfelmaus ist 60-mal so groß wie die Haut des Würfelelefanten. Das ist eine grobe aber dennoch brauchbare Abschätzung. Eine genauere Messung der Oberflächen könnten wir durch Modelltiere – wiederum aus Würfeln aufgebaut – erlangen, die die Gestalt der Tiere berücksichtigen.
Erhellend kann hier auch die bekannte Färbe-Aufgabe sein. Würfel, bestehend aus kleineren Teilwürfeln, werden auf allen 6 Seitenflächen (z.B. rot) gefärbt. Wie viele der Teilwürfel sind an 3, 2, 1, 0 ihrer 6 Seitenflächen gefärbt? (Abb. 2.3)

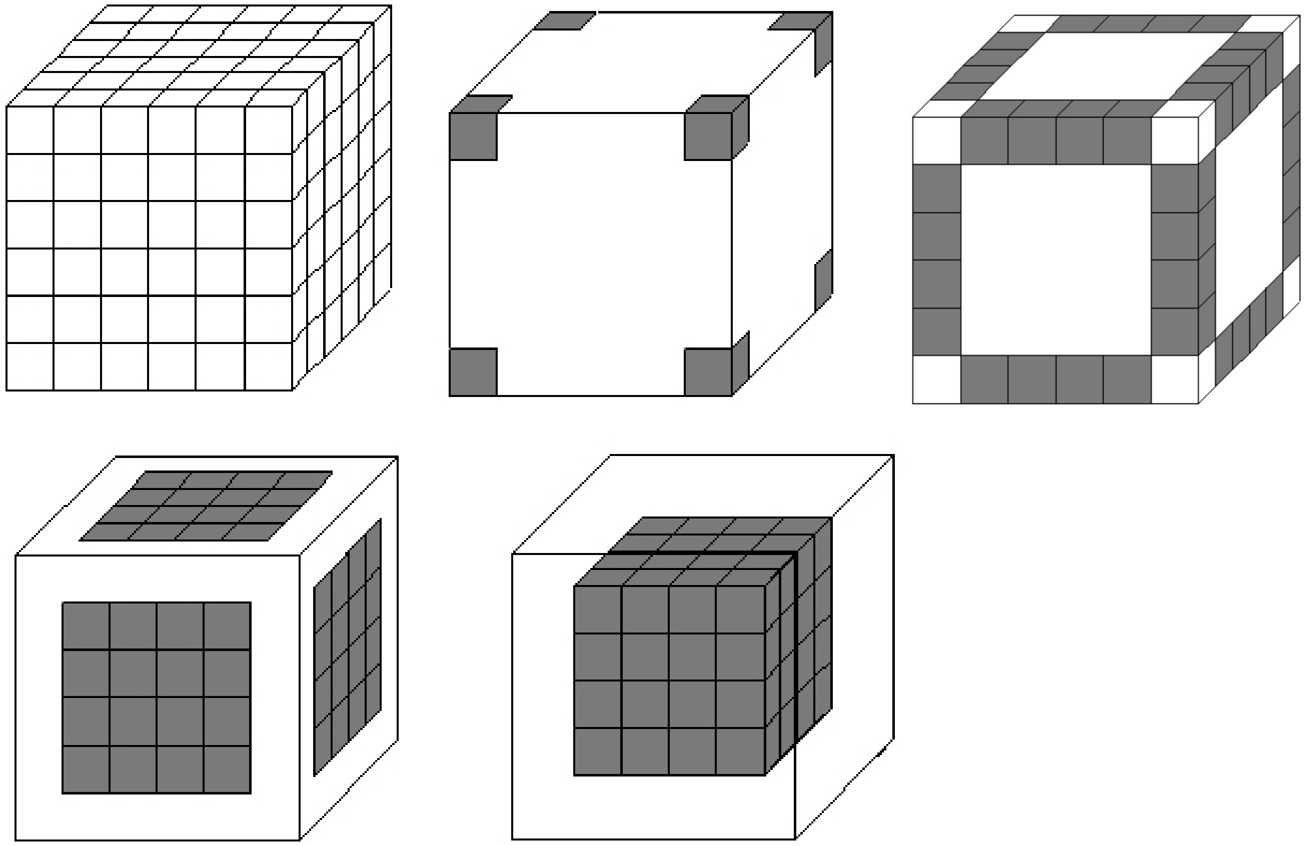


Abb. 2.3 Färben eines 6x6x6 - Würfels, Klassifizieren der Teilwürfel

Jetzt wird die entscheidende Rolle der Oberfläche für den Wärmehaushalt noch klarer: Fast alle ihre Teile im Inneren liegen nicht weit von der Haut entfernt. Die kleine Maus mit ihrer relativ großen Hautfläche, muss tüchtiger einheizen als der große Elefant mit seiner relativ kleinen Hautfläche. Das ist unser Hauptergebnis.

Das große Schreckgespenst der kleinen Maus ist der Tod durch Erfrieren. Sie schützt sich davor nicht nur durch relativ große Nahrungsaufnahme sondern auch noch durch ein Haarkleid und durch Verkleinern der Oberfläche (Zusammenkugeln im Ruhezustand). Die Maus ist ständig und hastig auf Nahrungssuche, und das Verbrennen der Nahrung erfordert einen schnellen Herzschlag: rund 600 Schläge pro Minute! Sie lebt auch nur höchstens 4 Jahre.

Das große Schreckgespenst des Elefanten, der ja im heißen Afrika lebt, ist der Hitzschlag. Er schützt sich davor durch den Verzicht auf ein Pelzkleid und durch die Vergrößerung seiner Hautfläche, und zwar durch viele Hautfalten und vor allem durch seine riesigen Ohren (vgl. Vogel 2001). Außerdem sucht er den Schatten von Bäumen und Wasserstellen, um sich abzukühlen. Das Verbrennen der Nahrung kann der Elefant auf

Sparflamme betreiben: weniger als die Maus Nahrung aufnehmen und gemächlicher verbrennen. Das Herz des Elefanten schlägt in der Minute nur etwa 27 Mal. Er lebt länger als die Maus, wird vielleicht 50 bis 60 Jahre alt, aber nicht so alt, wie es die Legende will.

Unsere Erklärung dafür, dass die Maus deshalb relativ mehr frisst als der Elefant, weil sie ein „ungünstigeres" Verhältnis von Oberflächeninhalt zum Rauminhalt hat, ist nicht der Weisheit letzter Schluss. Eine Frage ist: Woher „weiß" die Zelle der Maus, dass sie eine Mauszelle ist?

Andererseits ist unsere Betrachtung geeignet, eine Vielzahl von Erscheinungen in der belebten und unbelebten Natur wenigstens teilweise zu verstehen, z.B. die, dass Kinder keine maßstäblich verkleinerte Erwachsene sind (Haldane 1981; Winter 2002).

## 3 Münzgeld – wie gut ist unser Münzsystem?

„Geld ist eine neue Form der Sklaverei." (L. Tolstoi)

„Geld ist geprägte Freiheit." (F. Dostojewski)

Das Thema Münzen gehört seit jeher zum klassischen Bestand des Mathematikunterrichts der Grundschule. Hauptgründe dafür sind die sog. Lebensnähe (Kinder als Einkäufer, Sparer, Verdiener (!), ...) und die mögliche positive Nutzung des Münzsystems zum Aufbau arithmetischer Begriffe, besonders des Dezimalsystems. Insoweit ist die Beschäftigung mit unseren Münzen tatsächlich unverzichtbar.
Aber das Thema weist weit über die Belange privater Alltäglichkeiten und innermathematischer Zusammenhänge hinaus, es ist ja in erster Linie ein **wirtschaftliches und soziales Thema**, und einige Aspekte können und sollten auch schon in der Grundschule in den Blick genommen werden. Es geht um Versuche zur Aufklärung, und die ist nur interdisziplinär zu haben.

Kaum ein Thema ist allgemeiner als das Thema Geld (nicht nur in kapitalistischen Staaten), da nahezu alles menschliche Denken und Handeln (zumindest in der sog. entwickelten Welt) direkt oder vermittelt etwas mit Geld zu tun hat (Winter 1987). Ob der Einzelne nun alles daran setzt, reich zu werden und damit Macht, Einfluss, Ansehen zu erlangen, oder ob er – als extremer und heute sehr seltener Kontrast zum Superreichen – auf die Güter dieser Welt freiwillig verzichtet, um in Armut und Bescheidenheit auch glücklich zu werden, oder ob er sich in der großen Masse zwischen Krösus und Franziskus bewegt, keiner kann sich in unseren westlichen Lebensverhältnissen den Geldhändeln entziehen, weder als Privatperson noch als Staatsbürger, und auch Kinder nicht.
Die meisten geschriebenen Zahlen in unserer Welt sind denn auch Geldbeträge, und sogar in unseren Volksmärchen spielt oft das Geld eine beherrschende Rolle, mal „positiv" (Goldmarie vs. Pechmarie), mal „negativ" (Hans im Glück, Vom Klumpen Gold zum Wetzstein).

Die erste und wichtigste Begegnung mit der Geldwelt erfolgt durch das Kennenlernen unserer Scheidemünzen und Banknoten, das ist bares (mhd. bar = nackt) Geld (Cash), und trotz des gegenwärtigen Fortschreitens des bargeldlosen Geldverkehrs wird es im Alltag wohl weiterhin Bargeldverkehr geben, man denke nur an Automaten für Getränke oder Bahntickets (ja, auch an die Schattenwirtschaft und an die politische Korruption).

In den Münzen offenbaren sich anschaulich, ja handgreiflich die unterschiedlichen Funktionen von Geld: Recheneinheit für marktfähige Güter, Mittel der Wertübertragung, Mittel der Wertbewahrung sowie die staatliche Verankerung von Geldsystemen.

Der fächerübergreifende und fächerverbindende Charakter unserer Thematik liegt auf der Hand: **Wirtschaftslehre** (als primär zuständige Disziplin), Finanzwissenschaften, Rechts- und Politikwissenschaften, Geschichte, Erdkunde, auch Psychologie, Philosophie und Theologie.

## 3.1 Spielerei mit unseren Münzen

Unentbehrlich für die Arbeit in der Klasse sind reale gegenwärtig gültige Münzen neben Spiel-(Papier-)Münzen, die man von jeder Sparkasse erhalten kann oder als Begleitmaterial des Schulbuchs zur Verfügung hat.

Es ist die Gelegenheit da, etwas, womit man vielleicht schon täglich zu tun hat, eingehender und wohl auch anders zu betrachten.


| | 1 Cent | 2 Cent | 5 Cent | 10 Cent | 20 Cent | 50 Cent | 1 Euro | 2 Euro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Durchmesser** | 16,25 mm | 18,75 mm | 21,25 mm | 19,75 mm | 22,25 mm | 24,25 mm | 23,25 mm | 25,75 mm |
| **Gewicht** | 2,30 g | 3,06 g | 3,92 g | 4,10 g | 5,74 g | 7,80 g | 7,50 g | 8,50 g |

Abb. 3.1 Unsere Münzen (Vorder-, Rückseite, Durchmesser, Gewicht)

Der Einstieg sollte – wie möglichst immer – problemorientiert sein, etwa:
Peter hat in seinem Portemonnaie doppelt so viele Münzen wie Paul, dieser hat in seinem aber doppelt so viel Geld wie Peter. Wie geht das?
Da gibt es viele Möglichkeiten zum Experimentieren, Probieren, Korrigieren, Einschränken und Verallgemeinern. Wenn z.B. jeder nur eine Sorte von Münzen hat, dann sind dies einige Lösungen:

| **Peter** | | **Paul** | |
|---|---|---|---|
| 2 | 5-Cent-Münzen | 1 | 20-Cent-Münze |
| 4 | 5-Cent-Münzen | 2 | 20-Cent-Münzen |
| 6 | 50-Cent-Münzen | 3 | 2-Euro-Münzen |

Sind das alle Möglichkeiten? Was fällt auf?
Mehr Möglichkeiten gibt es, wenn jeder der beiden auch wertverschiedene Münzen benutzen darf. Z.B. kann Peter sechs 1-Cent-Münzen, eine 2-Cent-Münze und eine 5-Cent-Münze haben und Paul eine 1-Cent-Münze, eine 5-Cent-Münze und zwei 10-Cent-Münzen.
Variationen:

- Peter hat doppelt so viele Münzen wie Paul, aber der hat genau so viel Geld wie Peter.
- Peter hat doppelt so viele Münzen wie Paul, aber dieser hat 1 Cent (2 Cent, 3 Cent, ...) mehr Geld als Peter.
- Peter hat dreimal so viele Münzen wie Paul aber doch nur genau so viel Geld wie Paul.
- Beide haben gleich viele Münzen, aber der Geldunterschied zwischen beiden ist 1 Cent (5 Cent, 10 Cent, 12 Cent, ...).
- Beide haben 2 (3, 4, ...) Münzen. Wie groß ist der Geldunterschied höchstens?
- Beide sollen gleich viele Münzen und den gleichen Geldbetrag haben, aber auf andere Art. Geht das?
- Denkt euch weitere Aufgaben aus.

### 3.2 Unsere Münzen – gut geordnet zum Auswählen und Abzählen?

Das Spiel lenkt den Blick auf unser Münz**system,** u.a. darauf, dass wir dem Geldwert nach **8 Münzsorten** unterscheiden, die man auf übersichtliche Art **ordnen** kann. Achtet man nicht nur auf die aufgeprägte Wertangabe, sondern auch noch auf Farbe und Größe, so kann die Ordnung in Abb. 3.2 gefunden werden.

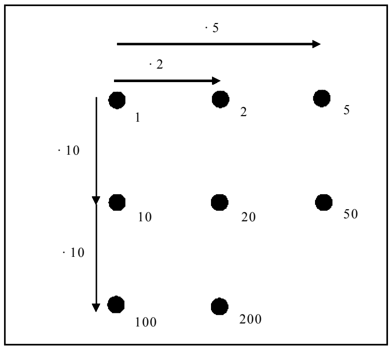



Abb. 3.2a Unsere 8 Münzsorten, gut zu unterscheiden? Abb. 3.2b Aufbau-Schema

Diese Ordnung wird nun genauer beschrieben (möglichst schriftlich, vielleicht in Partnerarbeit), etwa: Es gibt der Farbe nach dreierlei Münzen, nämlich 3 rote, 3 gelbe und 2 weiß-gelbe. Die 3 roten Münzen haben die geringsten Werte, ihre Wertunterschiede zeigen sich in Größenunterschieden, usw.

Am wichtigsten ist aber das **kritische Nachfragen**. Warum hat z.B. unsere Ordnung ein Loch? „Eigentlich“ müsste es doch noch eine 5-Euro-Münze geben. Zur DM-Zeit gab es ja eine 5-DM-Münze (allerdings keine 20-Pf-Münze). Was spricht für, was gegen eine 5-Euro-Münze? Wenn ihr euch nicht einigen könnt, dann schreibt an die Deutsche Bundesbank (Postfach 10 06 02, 60006 Frankfurt/M.).

Würden wir eine 5-Euro-Münze noch zufügen, so sollte diese ja größer und schwerer sein als die 2-Euro-Münze, und wir hätten insgesamt 9 Münzsorten. Ist es gut, so viele Münzsorten zu haben?

Denkt an das Bezahlen an der Kasse im Lebensmittelladen. Kunden haben es oft eilig. Wehe, wenn sich eine Warteschlange bildet! Der Kunde benötigt Zeit für das **Auswählen** der richtigen Münzen aus dem Portemonnaie und Zeit für das **Abzählen** und Hinlegen der Münzen. (Hier beschränken wir uns – unrealistischerweise – auf Bezahlen mit abgezähltem Geld, das ja gar nicht immer möglich ist).

Wir spielen Bezahlen in der Klasse nach. Beispiel: Es sind 1,67 Euro zu zahlen, und im Portemonnaie befinden sich zufällig Münzen aller 8 Sorten und von jeder Sorte 2 Stück. Wir stoppen die Zeitspannen für Auswählen und Abzählen. Der mitrechnende Kunde wird je eine 1-Euro-Münze, 50-Cent-Münze, 10-Cent-Münze, 5-Cent-Münze, 2-Cent-Münze und 1-Cent-Münze aussuchen und kumulierend zählen 1 Euro, 1,50 Euro, ... bis 1,67 Euro. Er muss also 6 Münzen finden und hinlegen. Ginge es mit weniger Münzen? – Wie sähe die Sache aus, wenn im Portemonnaie zufällig drei 50-Cent-Münzen, vier 5-Cent-Münzen und neun 2-Cent-Münzen wären? Experimentiert mit weiteren Portemonnaie-Inhalten.

Wir sollten zur folgenden (halbquantitativen) Einsicht gelangen:

| | **Zeit zum Auswählen** | **Zeit zum Abzählen** |
|---|---|---|
| **Wenige Münzsorten** | kurz | lang |
| **Viele Münzsorten** | lang | kurz |

Die Extremfälle sind: Nur **eine** Sorte, nämlich 1-Cent-Münzen (warum?), im obigen Beispiel wären 167 Münzen abzuzählen und hin zu legen. Erzählt, was los wäre, wenn wir nur 1-Cent-Münzen hätten.

Das andere Extrem: Für jeden Geldbetrag, etwa von 1 Cent bis 200 Cent, gibt es eigens Münzen (Real gibt es das ja beim Bezahlen mit Scheckkarte!). Schreibt auf, was dann passieren würde.

Fazit: Es sollte also so wenig wie möglich Münzsorten geben, um das Auswählen rasch zu schaffen, aber doch auch so viele Münzsorten wie nötig, damit man möglichst wenige Münzen zum Bezahlen braucht. Das ist eine typische Frage des Abwägens und der Kompromissbildung.

Jetzt wird auch die Bedeutung der **Farben** klar: Sie helfen beim Auswählen, was ja hauptsächlich mit den Augen geschieht. Brauche ich eine 50-Cent-Münze, so achte ich nur auf die gelben Münzen im Portemonnaie. Was aber ist, wenn man schlecht sehen kann?
Was würde sich ändern, wenn man nicht drei sondern vier oder zwei Farben benutzte? Gibt es Gründe für die Färbung rot, gelb, weiß-gelb, wie wir sie haben, oder hätte man auch anders färben können, z.B. schwarz, rot, gold? Wie und woraus werden überhaupt Münzen hergestellt?
Sehen können wir nicht nur die Farben, sondern auch die **Größe der Münzen**, die durch ihren Durchmesser und ihre Dicke gegeben ist. Es empfiehlt sich, diese Durchmesser selbst zu messen. Spannend kann dann der Vergleich mit den offiziellen Angaben sein.

Was aber fällt an der Größe auf? Bauen wir aus den 8 Münzen einen Turm gemäß ihrer Werte, unten die 2-Euro-Münze, oben die 1-Cent-Münze, dann wird der Turm nach oben hin **nicht** immer schmaler, die 5-Cent-Münze ist größer als die 10-Cent-Münze, und die 50-Cent-Münze ist größer als die 1-Euro-Münze. Also gilt nicht: je wertvoller, desto größer. Innerhalb jeder Farbe passt es wohl: Je höher der Münzwert, umso größer ist die Münze. Warum ist das so kompliziert?
Wäre es nicht besser, wenn die Durchmesser der Münzen durchgängig und gleichmäßig mit ihrem Wert wachsen würden, vielleicht von 16 mm (1-Cent-Münze) bis 30 mm (2-Euro-Münze), immer um 2 mm größer? Benutzt den Zirkel oder eine Schablone und zeichnet das neu erfundene Geld. Wäre es besser als unser Eurogeld? (Unversehens geraten wir in die Wahrnehmungspsychologie). Wenn wir wollen, dass es möglichst große Unterschiede zwischen „benachbarten“ Münzen derselben Farbe gibt, gleichzeitig aber auch eine Höchstgrenze zu respektieren ist, dann müssen wir tatsächlich unser Eurogeld (Abb. 3.2) für besser halten als das der Abb. 3.3.

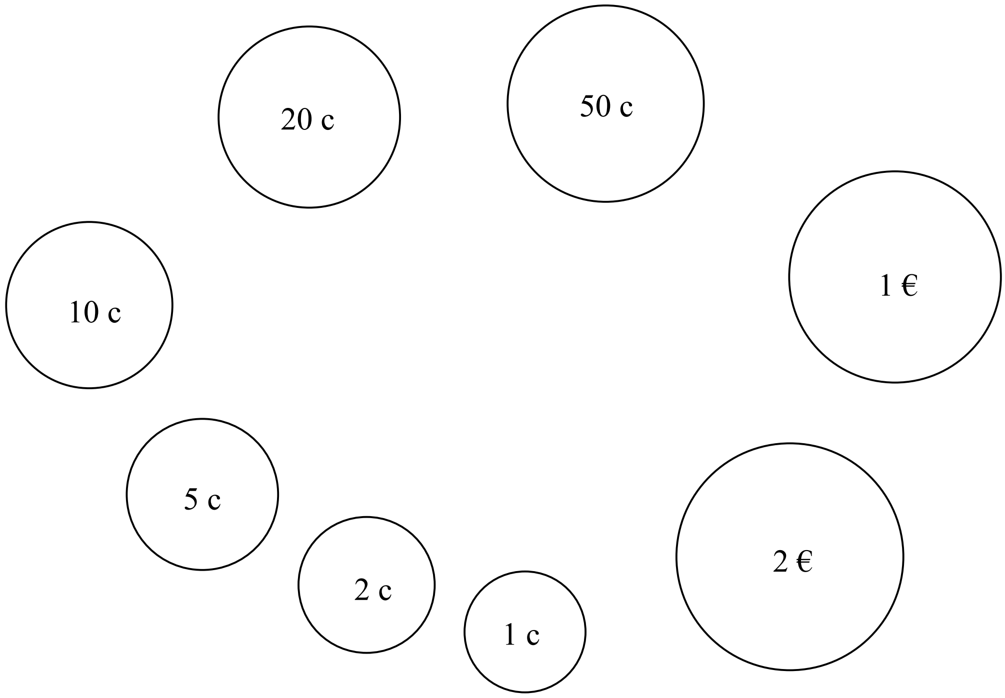



Abb. 3.3 „Neues“ Münzgeld, gleichmäßig wachsende Durchmesser

Auf ähnliche Weise können wir uns mit den **Gewichten der Münzen** befassen. Auch hier finden wir keine durchgehende Ordnungstreue zu den Münzwerten.

Die sichtbaren und fühlbaren Unterschiede zwischen den 8 verschiedenen Münzsorten dienen nur dem einen Zweck: Sie sollen helfen, den Wert der Münze rasch und sicher zu erkennen. Inwieweit das tatsächlich der Fall ist, kann nur die Praxis des Gebrauchs entscheiden.

Es bieten sich in der Klasse Versuche mit Kindern an: Einem Kind werden die Augen verbunden (Es gibt ja sehbehinderte Menschen, die einkaufen gehen.) und es wird gebeten, den Wert einer oder mehrerer Münze(n) durch Befühlen zu bestimmen. Oder: Es werden Münzen als nackte Kreise dargestellt. Ihr Wert ist zu bestimmen.

Die genauere Betrachtung der äußeren Eigenschaften unserer Münzen sollte uns zu einer weiteren wichtigen Einsicht verhelfen: Der Wert der Münzen spiegelt sich nicht klar in ihren äußeren geometrischen, physikalischen Eigenschaften, ist vielmehr **aufgeprägt**, wird also der Münze zugeteilt. Noch klarer wird das am Papiergeld, den Banknoten. Das Münzmaterial vertritt nicht als solches den Wert, insofern ist auch die griffige

Münze mehr ein Zeichen, ein Symbol für einen Wert. Dieser wird von staatlicher Seite festgelegt und garantiert.

Dass das Geld eine hoheitliche staatliche Sache ist, sehen wir auf der Rückseite der deutschen Münzen (Eichenlaub, Brandenburger Tor, Bundesadler) und auf dem Rand der 2-Euro-Münze (Anfang der Nationalhymne). Nachahmen von Münzen und Banknoten ist verboten und wird hart bestraft. Geldherstellung ist allein eine hoheitliche staatliche Sache. Dennoch war vor kurzem in der Zeitung zu lesen:
„Deutsche Zwei-Euro-Münzen sind bei Fälschern besonders beliebt, berichtet die EU-Kommission. Laut Bundesbank wurden 2005 in Deutschland rund 74 000 falsche Euro-Geldscheine, etwa 7000 weniger als 2004, und 46 300 falsche Münzen entdeckt nach 51 000 in Jahr zuvor, aber mit stark steigender Tendenz im 2. Halbjahr."

In früheren Zeiten  entsprach dem Gewicht des Metalls – insbesondere Kupfer, Silber, Gold – ihr Wert, so dass man also grundsätzlich durch Wiegen den Wert nachmessen konnte (bei Legierungen war dies aufwändiger, die Münze musste aus echtem Schrot und Korn sein).

### 3.3 Das „kleinste" Portemonnaie

Wie viele und welche Münzen sollten im Portemonnaie sein, damit man, wenigstens einmal, damit jeden möglichen Geldbetrag – etwa von 1 Cent bis 2 Euro – abgezählt auf den Kassentisch legen kann? Aber es sollten möglichst wenige Münzen sein, damit das Portemonnaie nicht zu dick und zu schwer wird und das Auswählen nicht zu mühselig ist.

Das ist wieder eine schöne Extremwertaufgabe, die die Schülerinnen und Schüler auf verschiedenen Wegen lösen können. Etwa so: Zunächst einmal muss jede Münzsorte zumindest mit einer Münze dabei sein (weshalb?).
Das reicht aber nicht, denn es gibt Beträge, die es erfordern, dass manche Münzsorten doppelt vertreten sein müssen. Suchen wir also nach den aufwändigsten Geldbeträgen! Das sind Beträge kurz vor einer „Münzstufe" wie 50 Cent, 1 Euro, 2 Euro. Für 1,98 Euro und 1,99 Euro braucht man beispielsweise je 7 Münzen. Es wird entdeckt,

dass genau die Münzen 2 Cent und 20 Cent doppelt dabei sein müssen (warum nicht die anderen?).
Damit enthält das „kleinste Portemonnaie“ diese 10 Münzen:
1 Cent, 2 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro, 2 Euro.
Das kann zu flotten Rechenübungen verwandt werden: Ein Betrag wird genannt, die erforderlichen Münzen werden „angetippt“ oder umgekehrt.
Wichtiger sind aber weiter gehende Gedanken: Bei keinem Betrag von 1 Cent bis 2 Euro braucht man alle 10 Münzen. Der Höchstbetrag aus allen 10 Münzen ist 4,10 Euro. Man kann mit den 10 Münzen alle Beträge von 2,01 Euro bis 4,10 Euro legen.
Und noch eine Aufgabe: Kann man die 10 Münzen so in zwei Haufen teilen, dass jeder Haufen den Wert 2,05 Euro hat?
Ist das „kleinste Portemonnaie“ nur eine mathematische Spielerei? Ein unmittelbarer Nutzen für Geldhändel des Alltags scheint eher nicht erkennbar, denn

1) nach jedem Einkauf müsste es wieder aufgefüllt werden,
2) in der Praxis besteht meist kein Zwang, abgezählt zu zahlen, man kann mit Rückgabe zahlen,
3) und damit zusammenhängend: nicht alle Preise kommen mit derselben Wahrscheinlichkeit vor, bei uns herrscht geradezu eine irrationale Lust daran, Preise mit „Neunerende“ auszustatten.

Was 2) angeht, so verdient das „Bezahlen mit Rückgabe“ tatsächlich eine gesonderte Betrachtung (schon in 3.2), aber es ist komplexer, nicht eindeutig und berührt das Zeitproblem weniger als man glauben könnte. Meist wird der Kunde auf Kosten der Kassiererin entlastet. 69 Cent abzählend zu zahlen, erfordert vom Kunden, mindestens 5 Münzen zu aktivieren, falls sein Portemonnaie das hergibt. Bei Bezahlen mit Rückgabe sind im günstigsten Falle nur 3 Münzen im Spiel (2 hin, 1 zurück), aber es können auch 5 Münzen oder mehr bewegt werden müssen, z.B. wenn der Kunde zufällig nur 20-Cent-Stücke oder nur eine 2-Euro-Münze im Portemonnaie hat.

Abgesehen davon, dass die obige Kritik selbst schon einen Beitrag zum wirtschaftlichen Denken darstellt, so ist das theoretische Konstrukt „kleinstes Portemonnaie“ geeignet, übergeordnete (d.h. nicht private) Fragen zu stellen und zu verfolgen, etwa die nach der

Anzahl der Münzen, die von jeder Sorte im Umlauf sind. Im Jahr 2002 waren bei uns im Umlauf (Deutsche Bundesbank, 2003):

| **Münzwert** | 2 Euro | 1 Euro | 50 Cent | 20 Cent | 10 Cent | 5 Cent | 2 Cent | 1 Cent |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Anzahl in Mio.** | 739 | 823 | 834 | 1186 | 1397 | 1488 | 1629 | 1845 |

Was kann man hieraus lernen? Hättest du gedacht, dass die roten Münzen so stark vertreten sind?

### 3.4 Die „mittlere" Münzzahl

Bei jedem Geldhandel mit Münzen werden je nach Betrag unterschiedlich viele Münzen in Bewegung gebracht, mal sehr wenige, mal „mittel viele", mal viele. Für 10 Cent braucht man nur 1 Münze mindestens, für 26 Cent kommt man mit 3 Münzen aus und für 89 Cent braucht man mindestens 6 Münzen. Nenne weitere Beispiele dieser Art.
Ein Münzsystem soll als „gut" angesehen werden, wenn es nicht nur dem Auswählen und Abzählen freundlich ist, sondern auch „im Mittel", also durchschnittlich, möglichst wenige Münzen für einen Geldbetrag erfordert.
Um unser Münzsystem auf seine Güte zu prüfen, stellen wir jeden Geldbetrag von 1 Cent bis 1 Euro durch die kleinstmögliche Anzahl von Münzen dar, und zwar mittels Papiermünzen in einer Hundertertafel auf einem Karton, unserem Münzposter. Wir denken uns dabei, dass jemand hintereinander alle 100 Käufe von 1 Cent bis 1 Euro getätigt hat.
Diese Tafel regt zu vielerlei Fragen, Vermutungen, Entdeckungen an, auf die wir hier leider nicht eingehen können. Nur eine Aufgabe (die Gauss-Aufgabe) nebenbei: Wie groß ist die Summe aller 100 Beträge? Das Poster legt verschiedene Lösungswege nahe.

Konzentrieren wir uns auf die Frage nach der mittleren Zahl der Münzen, so liegt es nahe, eine neue Hundertertafel im Heft anzulegen, in der in jedes Feld die Anzahl der mindestens erforderlichen Münzen eingetragen wird (Abb. 3.4). Das ist eine schöne Übung zum Klassifizieren.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 3 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 3 |
| 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 1 |

Abb. 3.4 Mindestzahl der Münzen für jeden Betrag von 1 Cent bis 100 Cent

Wie groß ist die Gesamtzahl aller Münzen? Es gibt mehrere Wege. Ein recht geschickter Weg nutzt das Muster aus, das die verzeichneten Zahlen bilden, deren zugehörige Felder man zur Unterstützung auch färben kann. Da gibt es 7 Felder mit 1 Münze, 17 Felder mit 2 Münzen usw., so dass sich die Gesamtzahl der Münzen 7x1 + 17x2 + 28x3 + 28x4 + 16x5 +4x6 = 341 ergibt. Wir sehen daran schon, dass die mittleren Münzzahlen 3 und 4 am häufigsten vorkommen. Um daraus zu **der** mittleren Anzahl zu kommen, denken wir uns die 341 Münzen möglichst gleichmäßig auf die Tafel verteilt. Es können dann (schöne Entdeckung!) in 59 Feldern 3 Münzen und in 41 Feldern 4 Münzen liegen. Und das bedeutet, dass die mittlere Zahl zwischen 3 und 4 liegt, näher an 3 als an 4. Rechnerisch: Der rein gedankliche Durchschnittswert der Münzzahlen ist 341 : 100 = 3,41.
Danach braucht man also durchschnittlich 3 bis 4 Münzen, wenn man einen Betrag von 1 Cent bis 1 Euro legen will.

Aber wie realistisch ist unsere Bestimmung? Es muss hervorgehoben werden, dass die Beschränkung auf die Mindestzahl und die verdeckte Annahme, dass die 100 Beträge gleichwahrscheinlich auftreten, starke Vereinfachungen sind.
Gleichwohl lohnt es sich, alternative Münzsysteme auf dieselbe Art zu untersuchen, beispielsweise

1. unser Münzsystem ohne 20-Cent-Münzen (unser früheres DM-System ohne 5-DM-Stück),
2. das System mit den 3 Münzsorten 1 Cent, 10 Cent 1 Euro (Dezimalsystem),

3. das System mit den 4 Münzsorten 1 Cent, 5 Cent, 50 Cent, 1 Euro und
4. das revolutionäre System mit den 7 Münzsorten 1 Cent, 2 Cent, 4 Cent, 8 Cent, 16 Cent, 32 Cent, 64 Cent (Dualsystem).

Bei 4. wäre herauszuarbeiten, dass dieses System zwar von allen betrachteten die niedrigste mittlere Münzzahl hat, aber dennoch keine Chance hat, Wirklichkeit zu werden.

# 4 Der Kalender – zwischen Bürgeranspruch und Himmelsgesetzen

„Solange die Erde steht, soll nicht aufhören Saat und Ernte, Frost und Hitze, Sommer und Winter, Tag und Nacht“ (AT, 1.Mose 8 22).

Das Thema gehört zu zwei gänzlich unterschiedlichen Wissensbereichen: zur **Astronomie** (der ältesten Naturwissenschaft, ein Geschenk des Himmels) und zum **Wirtschafts- , Rechts- und Verwaltungswesen** hinreichend entwickelter Gesellschaften. Es ist kein Zufall, dass die Entwicklung von Kalendern Bestandteil der Entwicklung von Hochkulturen gewesen ist.

Dass Kalender alltagsrelevant sind, bedarf keines weiteren Hinweises, man braucht nur an Ferienordnungen, Zahlungstermine, Jubiläen und Haltbarkeitsdaten zu denken.

Im Mathematikunterricht der Grundschule findet das Thema im Rahmen der Zeitmessung und Zeitmaßeinheiten seit jeher Berücksichtigung, aber seine Bedeutung für das menschliche Leben (als Individuum und Mitglied von Gesellschaften) wird dabei i. Allg. kaum erkennbar, ganz zu schweigen von dem Bildungswert, den es offenbart, wenn Kalender nicht nur gehandhabt sondern auch in ihrer theoretischen Struktur erfasst werden können. Im Alltag weiß jedermann, dass wir alle 4 Jahre ein Schaltjahr haben (schon weniger, dass dies gelegentlich ausfällt), aber nichts darüber, warum das so ist, weder Ursache noch Zweck.

Natürlich können wir die Thematik in der Grundschule nicht ausschöpfen, insbesondere nicht die naturwissenschaftlichen Aspekte. Das kann und soll auch nicht unser Ehrgeiz sein. Jedoch wollen wir hier Vorschläge machen, wie das Thema Kalender als Bestandteil von Allgemeinbildung schon in der Grundschule entfaltet werden kann.

Es ist in der Tat ein interdisziplinäres Thema, das nicht nur astronomische und gesellschaftswissenschaftliche Aspekte hat, sondern u. a. auch geographische, geschichtliche, künstlerische und religiöse.

Es wäre z.B. sehr schön, wenn in der Klasse ein Poster hinge, auf dem der schönste Kalender aller Zeiten, nämlich die Monatsbilder aus dem Stundenbuch „ Les Tres Riches Heures“ des Duc de Berry, zu sehen sind (Cazelles, R. & Rathofer, J. (o. Jg): Das Stundenbuch des Duc de Berry, Drei Lilien Edition Wiesbaden). Abb. 4.1 vermittelt nur einen schwachen Eindruck von der überwältigenden Schönheit der Monatsbilder aus dem 14. Jahrhundert.

Abb. 4.1 Monatsbild Juni aus dem Stundenbuch des Duc de Berry (1340 – 1416)

Dieses Bild könnte ein Einstieg in den Unterricht zum Kalender sein, wobei nicht daran gedacht ist, die folgenden Abschnitte alle und in geschlossenen Lehrgängen zu behandeln.
Da vieles für die Grundschule neu sein dürfte, mussten wir mehr ins Detail gehen. Wir empfehlen aber dringend die ergänzende Lektüre einschlägiger Fachliteratur, z.B.: Becker 1979, Boschke 1979, Herrmann 2000, Mütz 1996, Wendorff 1993.

## 4.1 Herstellen eines Kalenders vom laufenden Jahr 2006

Anlass zur Herstellung eines Kalenders vom laufenden Jahr könnte die Frage nach den Schulferien oder den Geburtstagen der Kinder in der Klasse oder nach den Terminen aktueller großer Sportereignisse sein. Wann genau finden in Aachen die Weltreiterspiele statt?
Nach der Einigung auf Größe (1 qcm für einen Tag) und Anordnung (7 Zeilen gemäß den Wochentagen) kann der Kalender in Gruppenarbeit entstehen (12 Gruppen). Anfang und Ende sehen wie Abb. 4.2 aus, die Monate sind miteinander verzahnt. Warum?

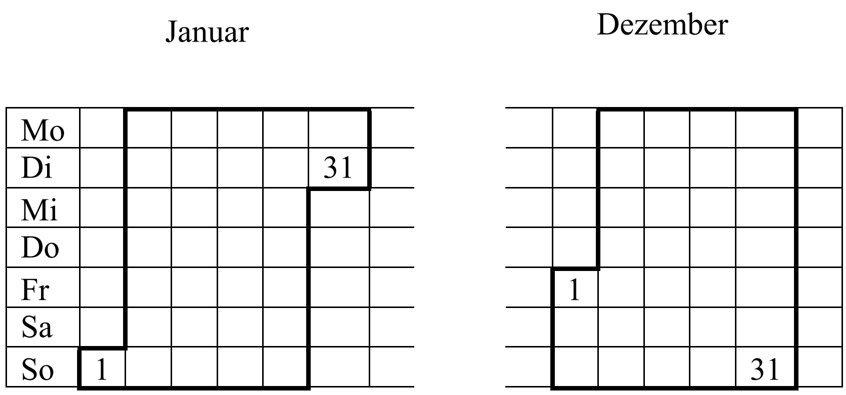



Abb. 4.2 Tage, Wochen und Monate des Jahres 2006

Dieses Gerüst eines Kalenders können wir auf gänzlich verschiedene Arten ausgestalten, z.B. besondere Tage (Sonntage, Feiertage, Ferientage, Jubiläumstage usw.) auszeichnen und/oder Monatsbilder à la Abb. 4.1 anfertigen, z.B. einen Fußballkalender, einen Blumenkalender, einen Tierkalender, einen Frauenkalender und nicht zuletzt einen Mathematikkalender (Bikner-Ahsbahs und Walther 2000).

Möglicherweise gibt es ein spontanes Interesse an den **Namen der Wochentage und Monate**. Da wird ein Blick in die Geschichte notwendig, und wir streifen schon einmal die Astronomie:

| **Wochentage** | **Planeten/Götter** | **Englische Bezeichnung** | **Französische Bezeichnung** |
|---|---|---|---|
| Sonntag | Sonne | Sunday | Dimanche |
| Montag | Mond | Monday | Lundi |
| Dienstag | Mars | Tuesday (germ. Gott Ziu) | Mardi |
| Mittwoch | Merkur | Wednesday (germ. Gott Wodan, Odi) | Mercredi |
| Donnerstag | Jupiter | Thursday (germ. Gott Donar, Thor) | Jeudi |
| Freitag | Venus | Friday (germ. Göttin Freya) | Vendredi |
| Samstag | Saturn | Saturday | Samedi |

Die 7 Gestirne von Sonne bis Saturn galten bis ins 16. Jahrhundert hinein als die 7 Planeten der Erde, um die sie kreisten (geozentrisches Weltbild). Gleichzeitig wurden sie als Götter oder Sitze von Göttern verehrt.

Die **Monatsnamen** haben wir auch aus der römischen Welt übernommen:

Januar (nach dem doppelgesichtigen Gott Janus), Februar (nach röm. Reinigungsfest), März (nach Kriegsgott Mars), April (von aperire = eröffnen; zeitweise erster Monat des Jahres), Mai (nach Wachstumsgöttin Maia), Juni (nach Göttin Juno), Juli (nach Gaius Julius Caesar (Kaiser)), August (nach Kaiser Octavianus Augustus), September, Oktober, November, Dezember (nach den röm. Zahlwörtern septem = sieben, octo = acht, novem = neun, decem = zehn).

In der Namensgebung wird deutlich, welch hohen (auch staatlichen) Rang Kalenderfragen gehabt haben. Das ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass der gestirnte Himmel, insbesondere die sich regelmäßig wiederholenden Erscheinungen von Sonne und Mond, zum Urerlebnis des schlechthin Gesetzhaften, streng Geordneten, Ewigen führte und auch zu Vorstellungen darüber, wer dieses geordnete Wunderwerk erschaffen hat und dirigiert.

Betrachten wir nun ganz bescheiden unser Kalendergerüst von Abb. 4.2. Was fällt auf an den Tagen, Wochen und Monaten des Jahres? Wie passen sie zusammen?

Das ganze Jahr hat 365 Tage (auf verschiedene Weise zu bestimmen), kann aber exakt weder in Wochen noch in Monate zerlegt werden, denn 365 ist weder durch 7 noch durch 12 teilbar (Nebenbei: Welches sind denn die Teiler von 365?). Es gibt der Länge nach zunächst 3 Sorten von Monaten: einer mit 28, vier mit 30, und sieben mit 31 Tagen. Berücksichtigt man zudem, dass der Februar in einem Schaltjahr 29 Tage hat, so kommt man auf 4 Sorten. Im Durchschnitt ist ein Kalendermonat $30\frac{5}{12}$ Tage lang.

Aufträge an die Schüler: Erfindet eine gleichmäßigere Verteilung der 365 Tage auf 12 Monate.
Sortiert die 12 Monate nach den 4 Jahreszeiten (z.B. Frühling: März, April, Mai). Was fällt auf?
In jedem Monat kommt jeder Wochentag mindestens viermal (das genau im Februar in einem Gemeinjahr wie 2006) vor, höchstens aber fünfmal. Welche der 12 Monate haben im Jahr 2006 5 Sonntage? Gibt es da etwas Regelmäßiges?
Alle 7 Wochentage treten 2006 als Monatserste auf, manche mehrmals. Wieso das? Und was ist über die Monatsletzten zu sagen?
Vergleiche den März mit dem November, den April mit dem Juli. Was fällt auf?
Wir werfen von 2006 einen Blick zurück auf 2005 und einen nach vorn auf 2007. Diese beiden Nachbarjahre haben auch 365 Tage. Mit welchen Wochentagen beginnen und enden diese Nachbarjahre? Löse das rechnerisch. Der 01.07.2006 ist ein Samstag. Berechne den Wochentag des 01.07.2005 und des 01.07.2007. Findest du eine allgemeine Regel?

## 4.2 Datum und Wochentag – auf dem Anfang des Weges zum ewigen Kalender

Wir wissen längst: Alle 7 Tage, also nach 1 Woche wiederholt sich derselbe Wochentag. Das können wir uns noch einmal an einem Kreisbild klar machen und begrifflich erweitern (Abb. 4.3).

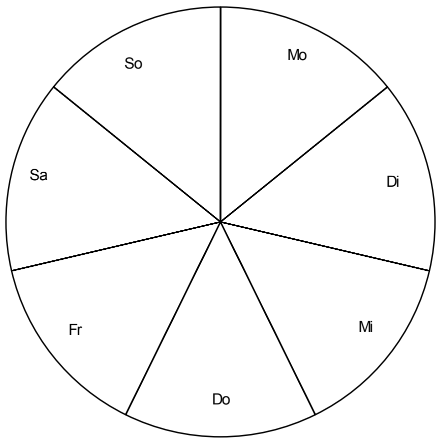



Abb. 4.3 Zyklus  der Wochentage (gr. Kyklos = Kreis, Rad)

Daran können wir auch leicht sehen, dass heute in 14 Tagen, 21 Tagen, 70 Tagen, 350 Tagen, 364 Tagen, ... derselbe Wochentag ist wie heute. Dann ist auch schnell zu erkennen, dass heute in 365 Tagen (also heute in 1 Jahr) derselbe Wochentag ist wie morgen. Und welchen Wochentag hatten wir heute vor einem Jahr?

Diese Regelhaftigkeit schreiben wir in einem Schema auf. Dazu ein Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Datum heute vor 1 Jahr | 19.08.06 | **Datum heute** | **19.08.06** | Datum heute in 1 Jahr | 19.08.06 |
| Wochentag heute vor 1 Jahr | Freitag | **Wochentag heute** | **Samstag** | Wochentag heute in 1 Jahr | Sonntag |

Anstelle des 19.08. können wir jedes andere Datum nehmen. Wir sehen: In zwei benachbarten Jahren fällt nie ein  Datum auf denselben Wochentag.

Leider gilt unsere Regel (Wochentag heute in 1 Jahr = Wochentag morgen) **nicht durchgehend**, weil es auch Jahre mit 366 Tagen gibt, Das sind **Schaltjahre**, da wird noch 1 Tag als der 29. Februar zwischen geschaltet. 2008 ist ein solches Schaltjahr, dann 2012, 2016, ... (fast) alle 4 Jahre. Genauer heißt diese Regelung (unseres Gregorianischen) Kalenders:

Ein Jahr ist ein Schaltjahr, wenn die Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist mit Ausnahme jener Jahre, deren Jahreszahl ohne Rest durch 100 aber nicht ohne Rest durch 400 teilbar ist. Das Jahr 2000 war deshalb ein Schaltjahr (kein **Gemeinjahr**), aber die Jahre 2100, 2200, 2300 werden keine Schaltjahre sein. Es empfiehlt sich, mit der Klasse einen Fragebaum zu entwickeln (Abb. 4.4).

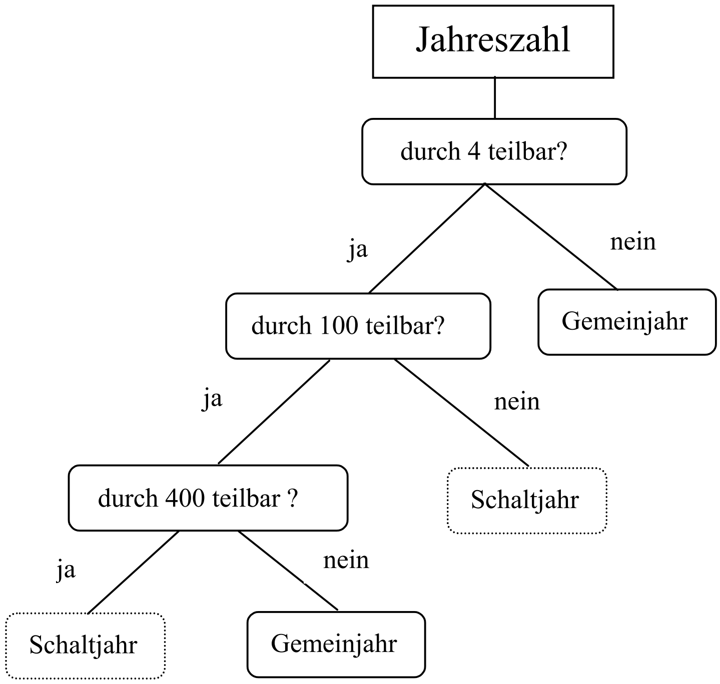



Abb. 4.4 Fragebaum zur Frage „Schaltjahr oder Gemeinjahr?“

Wie viele Schaltjahre gibt es in einem Zeitraum von 400 Jahren? – Wie viele Schaltjahre gab es seit 1600 bis heute? – Untersucht Zeitspannen von 5 auf einander folgenden Jahren (Wochenprojekt).
Die obige Wochentagsregelung ist also nur richtig, wenn es keinen Schalttag zwischen beiden Daten gibt. Schreibe eine weitere Regel auf für den Fall, dass von heute bis heute in einem Jahr 366 Tage vergehen.

Jetzt können wir rückwärts und vorwärts gewandt viele interessante Aufgaben stellen und lösen z.B. die **Sonntagsaufgabe**:

Anke hat am 13. September Geburtstagstag. 1996 wurde sie geboren. Ist Anke ein Sonntagskind, d.h. an einem Sonntag geboren?

Die Lösung kann durch „Zurückhangeln“ gefunden werden. Startsituation ist der Geburtstag des Jahres 2006, der ein Mittwoch ist (siehe Abb. 4.2). Dann geht es Jahr für Jahr rückwärts bis zum Jahr 1996, wobei wir Stück für Stück die Wochentage notieren:

| | | |
|---|---|---|
| 13.09.2006 | Mittwoch | (Start) |
| 13.09.2005 | Dienstag | |
| 13.09.2004 | Montag | (Schaltjahr, Schalttag 29.02.2004) |
| 13.09.2003 | Samstag | |
| 13.09.2002 | Freitag | |
| 13.09.2001 | Donnerstag | |
| 13.09.2000 | Mittwoch | (Schaltjahr, Schalttag 29.02.2000) |
| 13.09.1999 | Montag | |
| 13.09.1998 | Sonntag | |
| 13.09.1997 | Samstag | |
| 13.09.1996 | Freitag | (Ziel) |

Anke ist kein Sonntagskind, ist aber trotzdem sehr glücklich und sehr sympathisch. Schon früh sollten Kinder davon überzeugt werden, dass es keinerlei Bedeutung hat, an welchem Wochentag man geboren ist. Astrologie ist unwissenschaftlich, Horoskope sind Firlefanz.

Wer kann diese Aufgabe anders lösen? Schreibkürzer ist der Weg, wenn man sieht, dass der Wochentag 8-mal um 1 und 2-mal um 2 Wochentage zurück geht, also 12-mal um 1 Wochentag, das führt aber zum selben Wochentag wie das Zurückgehen um 5 Wochentage.

Ein weiterer Weg beantwortet gleich auch noch die Frage, wie viele Tage alt Anke am 13.09.06 wird. Da sind seit ihrer Geburt 8-mal 365 Tage und 2-mal 366 Tage vergangen, Anke ist am 10. Geburtstag 3652 Tage alt, und das sind 521 Wochen und 5 Tage.

Jetzt kannst du viele weitere Geburtstagsaufgaben lösen, z.B. über dich, deine Eltern, deine Freunde oder Freundinnen. Wenn ihr die Geburts-Wochentage aller Kinder der Klasse kennt, könnt ihr die Frage beantworten, ob dabei jeder Wochentag in etwa gleich oft vorkommt. Vielleicht ist etwas Merkwürdiges zu beobachten.

Eine vorwärts gerichtete Aufgabe, die wir auch lösen können, ist die **Weihnachtsaufgabe**:
Im Jahr 2006 fällt der erste Weihnachtstag, das ist in jedem Jahr der 25. Dezember, auf einen Montag. Wer könnte sich da besonders freuen? Wie war das im Jahre 2005, wie wird das im Jahre 2007 sein?
Auf welchen Wochentag fällt der 1. Weihnachtstag im Jahre 2020?
In welchem Jahr nach 2006 fällt der 1. Weihnachtstag erstmalig wieder auf einen Montag? Die Adventszeit beginnt mit dem 1. Adventsonntag und endet mit dem Heiligabend (24. Dezember). Wie viele Tage dauert die Adventszeit mindestens bzw. höchstens?
Mit der Weihnachtsaufgabe ist die **Mai-Aufgabe** verwandt: Der 1. Mai (Feiertag!) fällt im Jahre 2006 auf einen Montag, was recht günstig ist für Arbeitnehmer. Günstig ist aber auch der Freitag. Welches sind günstige Jahre nach 2006?
Nicht fehlen sollte die hoch interessante Aufgabe über den (angeblich) **schwarzen Freitag,** nämlich Freitag der 13., nicht zuletzt deshalb, weil es hierzu erprobte Unterrichtsvorschläge gibt und weil das Thema erneut den himmelweiten Unterschied zwischen Astronomie und Astrologie ins Gespräch bringt (Walther 1998). Teilfragen sind dabei: Gibt es Kalenderjahre ganz ohne einen schwarzen Freitag? Gibt es Jahre, in denen es mehrere schwarze Freitage gibt? Wenn ja, wie viele höchstens?

Nun können wir an eine allgemeinere Aufgabe herangehen:
Die Kinder sollen ein Kalendergerüst wie in Abb. 4.2 für irgendein zukünftiges Jahr herstellen. Das Gerüst von Abb. 4.2 soll uns dabei als bekannter Ausgangspunkt, als Basisjahr dienen.
Nehmen wir z.B. das Jahr 2030. In der Zeitspanne von 2006 bis 2030 gibt es 18 Gemeinjahre und 6 Schaltjahre (nenne sie), also verschieben sich die Wochentage gegenüber dem Jahr 2006 um $18 + 6 \cdot 2 = 30$ Tage nach vorn. Das ist aber dasselbe wie die Verschiebung um 2 Tage. Der 1. Januar 2030 fällt also auf einen Dienstag, weil ja der 1. Januar 2006 ein Sonntag ist. Damit könnten wir ein korrektes Kalendergerüst von 2030 herstellen. Wir könnten auch die Wochentage von Weihnachten und Sylvester, die Länge des Advents u.v.a. in 2030 leicht finden, nicht aber z. B. das Datum des Ostersonntags von 2030 (vgl. Abschnitt 4.6).

Das Jahr 2008 beginnt wie das Jahr 2030 mit einem Dienstag, dennoch stimmen die beiden Jahre bezüglich der Wochentage nicht vollkommen überein; woran liegt das?

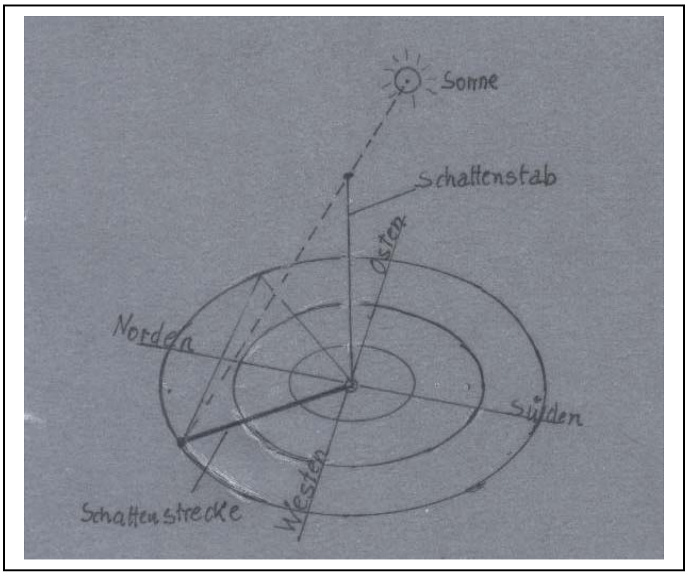
Das führt uns zu einer neuen Aufgabe, der **Wiederholungsaufgabe**: Untersuche das Jahr 2001 (dann weiter die Jahre 2002, 2003 usw. bis 2010) auf seine Wiederholungen hin, d.h. welche Jahre nach 2001 stimmen mit 2001 bezüglich der Wochentage überein? Fällt etwas auf?
Vielleicht findet jemand die **28er-Regel**: Alle 28 Jahre (im 20. und 21. Jahrhundert) wiederholen sich Jahre, die sich bezüglich der Wochentage gleichen, gleichgültig, welches Basisjahr man nimmt. Überprüfe die Regel an Beispielen, z.B. an den Jahren 1978 und 2006, und an den Jahren 1979 und 2007, 2000 und 2028, 2006 und 2034 usw. Kannst du die Regel begründen?
Die Regel sagt indes nicht, dass alle Jahre innerhalb von 28 Jahren hinsichtlich der Wochentage verschieden sind. Siehe die obige Wiederholungsaufgabe!

## 4.3 Sonne und Erde – Tag und Jahr

Jetzt wollen wir einen Blick hinter die Kulissen des Kalendermachens wagen, bisher haben wir ja Kalender als vorgegebene Produkte von Menschenhand angesehen. Jetzt geht es um das Warum, um Anstrengungen zur Aufklärung, und die sind anspruchsvoll.
Die Hauptfrage soll sein: Warum gibt es überhaupt Schaltjahre?
Was wäre, wenn wir sie einfach wegließen? Kalender sind ja von Menschen gemacht, und die Menschen könnten sich ja auf einen Kalender ohne Schaltjahre einigen. Tatsächlich hat es in der Geschichte solche Kalender gegeben (z.B. im alten Ägypten mit 360 Tagen im Jahr). Allerdings tritt dann ein Problem auf, auf das auch schon die Ägypter stießen: Es gibt einen mit der Zeit zunehmenden Missklang mit beobachtbaren Erscheinungen am Himmel, vor allem mit der Sonne. Sie gibt uns Erdenbürgern Wärme und Licht, das ist sonnenklar. Ihre Bedeutung mag durch eine Sammlung von Wörtern und Redewendungen, in denen „Sonne" vorkommt, angezeigt werden. Findet jemand 20 Beispiele oder mehr? Sonnenhut, Sonnenblume, sonnige Kindheit, sonnenverbrannt, ...

Was wissen wir über die **Bewegungen der Sonne**, wie sie uns täglich und jährlich erscheinen? Alle Kinder bei uns kennen wohl das Sprüchlein „Im Osten geht die Sonne auf, im Süden ist ihr Mittagslauf, im Westen wird sie untergehn, im Norden ist sie nie zu sehn." Das stiftet eine Beziehung zwischen **Tageszeiten** (Morgen, Mittag, Abend, Nacht) und Himmelsrichtungen (Osten, Süden, Westen, Norden), wobei aber offen bleibt, was das genau bedeutet und was ursprünglicher ist und ob das überall auf der Erde so zutrifft ...

Eine genauere Bestimmung und Zuordnung können wir uns verschaffen, wenn wir uns als junge Astronomen (zunächst mit geozentrischem Weltbild) betätigen. Auf einer möglichst ebenen, glatten und mit Papier ausgelegten Fläche, auf der gleichabständige konzentrische Kreise gezeichnet sind, errichten wir lotrecht einen dünnen Stab, einen sog. **Schattenstab** oder Gnomon und beobachten an sonnigen Tagen den Schatten des Stabes. Der Schatten kann in verschiedene Richtungen fallen und unterschiedlich lang sein (Abb. 4.5a). Ohne Experimente wissen wir vielleicht schon aus der Lebenspraxis: Besonders kurze Schatten gibt es mittags im Sommer, besonders lange Schatten morgens oder abends im Winter.



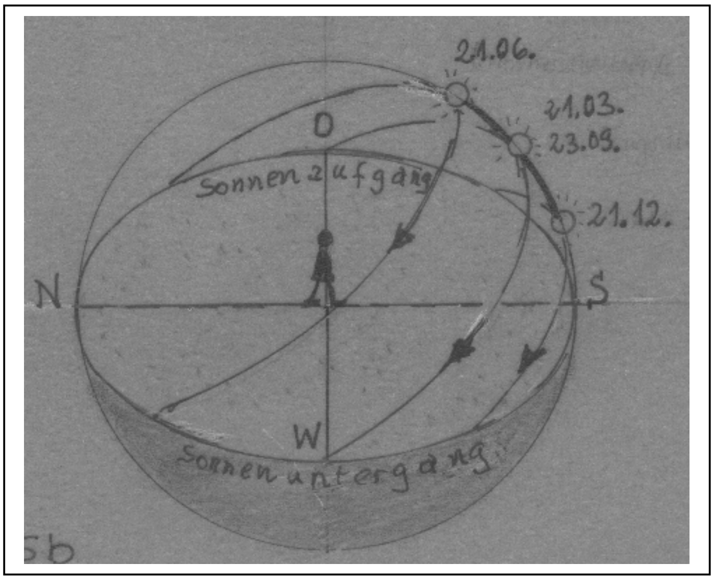




Abb. 4.5a Beobachtungen am Schattenstab Abb. 4.5b Sonnentag und Sonnenjahr

(Handskizze)

Markieren wir nun an einem bestimmten Tag auf dem Papier die Endpunkte der Schattenstrecken, so ergibt sich wie von selbst die Frage nach der **kürzesten Schattenstrecke**, also nach dem **höchsten Sonnenstand** an diesem Tag und an diesem Ort. Der Zeitpunkt dieser besonderen Stellung ist der sog. **„wahre“ Mittag** des Ortes des Schattenstabs. In den meisten Orten stimmt dieser Zeitpunkt nicht mit der Uhrzeit punkt 12 Uhr überein! Um diese Abweichung zu berücksichtigen, müsste man dann über Ortszeit

und Zeitzonen reden. Möglicherweise gibt es Streit bei der Festlegung der Mittagslinie. Wir können ja nur ein angenähertes Ergebnis erwarten.
Vielleicht entdeckt jemand die Halbierungsmethode: Die Endpunkte zweier gleich langer Schattenstrecken verbinden und den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke feststellen (Abb. 4.5a).
Jedenfalls zeichnen wir die Mittagslinie auf dem Papier deutlich aus. Dann können wir recht genau die **4 Himmelsrichtungen v**om Stab aus gesehen festlegen. Die Schattenstrecke auf der Mittagslinie zeigt genau nach Norden, entgegen gesetzt haben wir Süden. Also: Mittagslinie = Nord-Süd-Linie. Auf fast natürliche Weise erweitern wir das Bild auf unserem Papier durch die West-Ost-Linie, die im Fußpunkt des Stabes die Nord-Süd-Linie rechtwinklig schneidet. So ist der Erdkreis um den Stab herum, begrenzt durch den **Horizont**, in 4 gleiche Felder zerlegt. Es mag diskutiert werden, ob man die Himmelsrichtungen auf andere Art bestimmen und so unsere Festlegung kontrolliert werden kann, z.B. mittels Kompass. Auch könnte die Frage auftauchen, ob man überall auf unserer Erde die Himmelsrichtungen so wie bei uns mittels Schattenstab festlegen kann.

Wir sind nun in der Lage zu erklären, was, astronomisch gesehen, ein **Tag** ist:
Ein sog. wahrer Sonnen-**Tag** ist die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Mittagen, also Tages-Höchstständen der Sonne (Abb. 4.5b).
Verfolgen wir einen Tag als Erlebnis mit der Sonne: Höchststand mittags, sinken und westwärts bewegen nachmittags, untergehen, d.h. unter den Horizont versinken am Abend, Abenddämmerung, unsichtbar in der Nacht, Morgendämmerung, aufgehen im Osten am Morgen, steigen und westwärts bewegen am Vormittag, wieder Höchststand mittags.
Übungen zur „Einverleibung“ sind notwendig, etwa:
Du gehst bei sonnigem Wetter spazieren und beobachtest deinen Schatten. Siehst du den Schatten genau vor dir, dann gehst du Richtung ... und es ist ...
Du gehst nachmittags Richtung Westen. In welche Richtung zeigt dein Schatten?
Stellt euch selbst solche Rätsel.

Und was ist astronomisch gesehen ein **Jahr**?
Wieder können wir auf Beobachtungen am Schattenstab zurückgreifen, aber unser räumliches Vorstellungsvermögen wird jetzt stärker gefordert als bisher. Wir stehen auf

einer möglichst großen und ebenen Fläche und schauen Richtung Süden (Abb. 4.5b). Wenn wir das geduldig an verschiedenen Tagen tun, dann können wir beobachten, dass sich die täglichen Sonnenbahnen ändern, werden von Tag zu Tag länger und damit auch das Tageslicht oder werden von Tag zu Tag kürzer und damit auch das Tageslicht. Achten wir nun nur auf die mittäglichen Höchststände der Sonne. Sie scheinen sich auf einem Nord-Süd-Bogen zu bewegen (in Abb. 4.5b fett ausgezogen), der einen Tiefpunkt und einen Hochpunkt hat entsprechend der **Wintersonnenwende** bzw. **Sommersonnenwende**.

Ein **Jahr** – die Astronomen sprechen genauer von einem Sonnenjahr bzw. einem tropischen Jahr – kann erklärt werden als die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Sommer- (oder Winter-)Sonnenwenden.

Ähnlich wie oben beim Sonnentag sollten wir (an Hand von Abb. 4.5b) den Verlauf eines Jahres als Folge von Sonnenerscheinungen schildern: absoluter mittäglicher Höchststand der Sonne, 21. Juni, Sommersonnenwende, Beginn des Sommers, fallende mittägliche Sonnenstände ...

Wie geht es weiter?

Die angegebenen Daten sind Richtwerte, es gibt Schwankungen. So gilt für das Jahr 2006 Frühlingsbeginn 20.03., Sommerbeginn 21.06., Herbstbeginn 23.09., Winterbeginn 22.12.

**Nun die für die Kalenderkonstruktion entscheidende Frage: Wie passen die astronomischen Bestimmungen von Tag und Jahr zusammen? Kurz: Wie viele Tage hat ein Jahr?**

Die Astronomen haben schon im Altertum herausgefunden: Das Sonnenjahr ist nicht so lang wie eine ganze Zahl von Sonnentagen, vielmehr ungefähr so lang wie 365 Tage und $\frac{1}{4}$ Tag, genauer fanden die Astronomen später:

1 Sonnenjahr = 365 Tage + 5 Stunden + 48 Minuten + 46 Sekunden.

Bruchteile eines Tages kann es aber in einem Kalender nicht geben. Als Ausweg aus dem Nichtzusammenpassen von Sonnenjahr und Sonnentag erfand man schon im Altertum die Schaltjahr-Regelungen. Die Unterscheidung zwischen bürgerlichem und astronomischem Jahr war und ist unumgänglich.

Im Abstand von 4 Jahren sollte ein Jahr mit 366 Tagen stattfinden, so verfügte Julius Caesar im Jahre 46 vor Christi Geburt. Nach diesem Julianischen Kalender war ein Kalenderjahr also durchschnittlich $365\frac{1}{4}$ = 365 Tage + 6 Stunden lang, etwas länger als das Sonnenjahr.

Daraus erwächst die **Julianische Aufgabe:** Nach wie vielen Julianischen Kalenderjahren etwa ist der Unterschied zwischen Sonnenjahr und Julianischem Kalenderjahr auf einen Tag angewachsen? (Zwischen 2 aufeinanderfolgenden Jahren ist der Unterschied ja 11 Minuten + 14 Sekunden).

Im Jahre 1582 setzte Papst Gregor XIII (nach langen Diskussionen der Fachleute) eine Reform des Julianischen Kalenders durch, die allerdings zunächst nicht von allen christlichen Staaten übernommen wurde. Das wichtigste war eine Verbesserung der Schaltjahrregelung, nämlich diejenige, die wir heute noch haben und schon oben erwähnt wurde. Das ist die Regelung des heute in den meisten Staaten gültigen **Gregorianischen Kalenders.**

**Gregorianische Aufgabe:** Wie lang ist ein Gregorianisches Kalenderjahr? Am besten berechnest du zuerst, wie viele Tage eine Zeitspanne von 400 aufeinander folgenden Gregorianischen Kalenderjahren umfasst. Dann vergleiche das Ergebnis mit der Zeitspanne von 400 Sonnenjahren.

Gregor verfügte außerdem, dass im Jahr 1582 zehn Kalenderjahre zu streichen seien. So folgte auf Donnertag, den 04. Oktober 1582, unmittelbar Freitag, der 15. Oktober 1582. Auf 10 Tage war nämlich der Unterschied zwischen der astronomischen Festlegung des Osterfestes (auf dem Konzil von Nicaea anno 325) und dem Osterfest nach (Julianischem) Kalender angewachsen. Kannst du diese radikale Neuerung erklären?

**Zwischenbemerkung**: Unser Weg über die scheinbaren Bewegungen der Sonne, wie sie sich am Schattenstab darstellen (geozentrisches Weltbild), schließt keineswegs für die Grundschule aus, auch den heliozentrischen Standpunkt ins Spiel zu bringen, vor allem dann, wenn das von Schülern angesprochen wird. Wir brauchen in dieser Hinsicht kontrollierte Schulversuche.

Der Anspruch darf indes nicht unterschätzt werden und damit die Gefahr, dass alles zu unverstandenem Wortwissen gerät. In dieser Hinsicht sollten wir die Warnungen und Empfehlungen Wagenscheins nicht überhören (Wagenschein 1980).

Die Ungleichheit zwischen Kalenderjahr und Sonnenjahr **muss** indes **nicht** zu einer Schaltjahr-Regelung führen. Man könnte ja z.B. festlegen: 1 Kalenderjahr = 360 Tage = 12 Monate zu je 30 Tagen. Hierdurch würde sogar vieles in unserem Leben einfacher werden.
Gib dafür Beispiele aus deinem Leben an. Aber dieser Reformkalender hätte einen Nachteil: die Trennung von der Natur, vor allem von den Jahreszeiten. Das kannst du in der Abbildung 4.6 erkennen, wo Kalenderjahre und Sonnenjahre nebeneinander verlaufen.

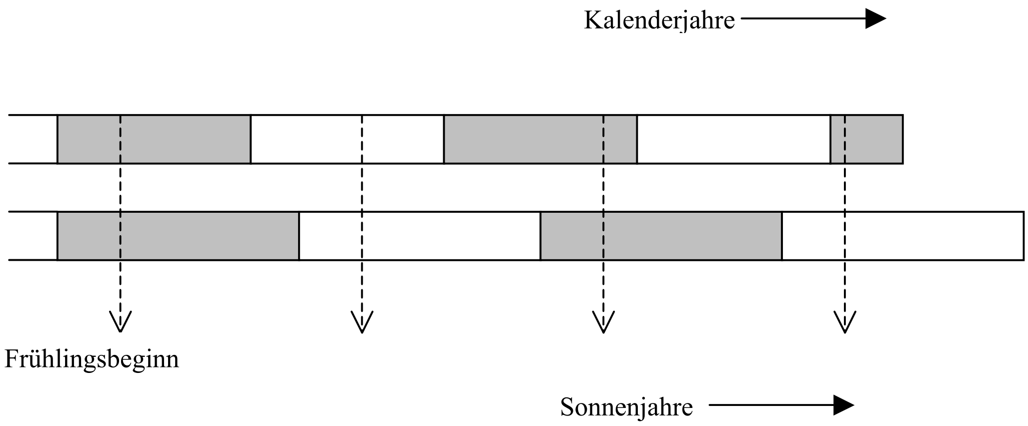



Abb. 4.6 Kalenderjahre und Sonnenjahre nebeneinander, vergröbert

Beschreibe, wie es sich im Laufe vieler Kalenderjahre auswirkt, wenn ein astronomisch bestimmter Zeitpunkt, der sich regelmäßig wiederholt, wie z.B. die Wintersonnenwende, in den Kalenderjahren registriert wird. Unterscheide dabei zwei Fälle: Kalenderjahr kürzer als / länger als ein „natürliches" Sonnenjahr.
Dazu eine Rechenaufgabe: Bei uns findet gegenwärtig die Wintersonnenwende Ende Dezember statt. Nimm nun an, dass künftig die Kalenderjahre 360 Tage lang sein sollen. Nach wie vielen von solchen Kalenderjahren läge dann die Wintersonnenwende nicht mehr im Dezember, vielmehr im Juli?

### 4.4 Erde und Mond – Woche und Monat

Unser Gregorianischer Kalender ist, wie wir gesehen haben, sonnenbestimmt. Aber wir kennen und benutzen ja auch **Wochen** mit konstanter Länge und **Monate** mit eher verwirrenden unterschiedlichen Längen.

Tatsächlich haben beide Zeitspannen mit dem **Mond** zu tun. Dieses unserer Erde am nächsten „gelegene“ und gut zu sehende Gestirn ist wahrscheinlich am frühesten in der Geschichte beobachtet worden: die regelmäßige Wiederkehr von Mondaufgängen und -untergängen und die Wiederholung der vier Phasen Neumond, zunehmendes Viertel, Vollmond, abnehmendes Viertel (Abb. 4.7). Dies alles kann mit dem unbewaffneten Auge gesehen werden; natürlich auch von Grundschülern.

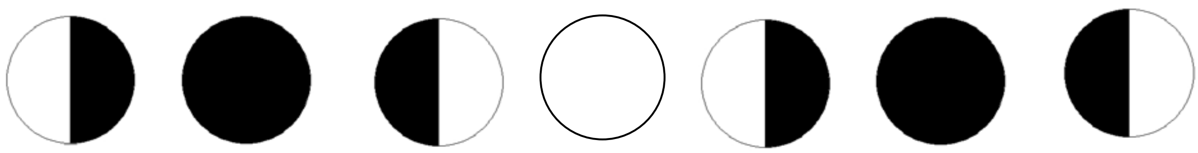



Abb. 4.7 Die Mondphasen

Wenn uns klar ist (und das legen die sichtbaren Phänomene nahe), dass der Mond sich um die Erde dreht und nicht von sich aus leuchtet, sondern Sonnenlicht zurück wirft, so müssten wir vielleicht Fragen dieser Art beantworten können: Warum ist der zunehmende Mond in der ersten Nachthälfte, der abnehmende Mond in der zweiten Nachthälfte zu sehen? Wann kann man den Vollmond sehen? Ist Neumond dasselbe wie Mondfinsternis? Warum scheint der Mond mit zu wandern, wenn wir nachts durch den Wald gehen?

Für das Kalendermachen benötigen wir die Beantwortung der Frage: Wie viele Tage vergehen von einem Neumond zum nächsten Neumond (oder von einem Vollmond zum nächsten Vollmond, ...), wobei wir gleich schon unterstellen, dass diese Zeitspanne konstant ist – wenigstens einigermaßen. Wenn wir verstanden haben, dass Neumond der Zeitpunkt ist, in dem der Mond uns seine nicht von der Sonne beleuchtete Seite zeigt und höchstens an seinem Rand schwach zu erkennen ist, dann mag es genügen, die fragliche Zeitspanne Monat der Literatur zu entnehmen, oder – besser – aus den Daten eines „guten“ Kalenders näherungsweise zu berechnen. Da finden wir:

$$1 \text{ Monat} = 29 \text{ Tage} + 12 \text{ Stunden} + 44 \text{ Minuten} + 2{,}9 \text{ Sekunden} \approx 29\ \frac{1}{2} \text{ Tage}$$

Da haben wir wieder das Nichtzusammenpassen von zwei Zeitspannen (Tag und Monat), und wir sehen, dass die schlichte Aussage 1 Jahr = 12 Monate der Erklärung bedarf.
Dass unser Kalenderjahr überhaupt in Monate aufgeteilt ist, hängt nicht nur mit dem Mond und seiner Bedeutung für das Kalendermachen in früheren Zeiten zusammen.
Ein ganzes Jahr mit seinen über 300 Tagen ist als Zeiteinheit zu lang und zu unübersichtlich. Ein Zeitraum von rund 30 Tagen lässt sich besser überschauen.

Vieles ist bei uns auf den Monat zugeschnitten, insbesondere Geldhändel: Monatsmiete, Monatsgehalt, Monatsrente, monatliche Ausgaben fürs Telefonieren, ...
Erkundige dich nach weiteren Beispielen. Vor allem aber kann man durch die Monatseinteilung das Leben in der Natur, das kirchliche Leben und das bäuerliche Wirtschaften in die Kalenderzeit einbeziehen. Neue (deutsche) Bezeichnungen haben sich zwar nicht durchsetzen können, z.B. Hornung für den Februar, Wonnemond für den Mai oder Christmond für den Dezember, aber auch heutige „moderne" Stadtmenschen, wohlgemerkt bei uns in Europa, nicht etwa in Kenia oder Argentinien, verbinden z.B. mit dem April Vorstellungen von launischem Wetter, beginnender Wärme, linde Lüfte, winterliche Rückfälle, Frühblühern, Ostern, usw.
Trotzdem: Weltweit gesehen werden heute die Monate immer weniger als astronomische, fast nur noch als bürgerliche Zeitspannen erlebt.

Und die **Woche**? Wir haben gesehen, dass sie als 4. Teil eines astronomischen Monats eigentlich nicht angesehen werden kann. Gleichwohl mag in grauer Vorzeit bei starker Bindung an das Mondgeschehen ein Zeitraum von 7 Tagen auch als mondbestimmt anerkannt worden sein, zumal der Zahl 4 hohe symbolische Bedeutung zukam: 4 Jahreszeiten, 4 Himmelsrichtungen, 4 Elemente, usw. Andererseits gab es im Altertum auch andere Unterteilungen des Monats, die alten Griechen z.B. unterschieden 3 Teile zu je 10 Tagen. Durchgesetzt hat sich unter dem Einfluss des Christentums die 7-Tage-Woche mit 6 Werktagen und einem Sonntag als einem Tag des Ruhens, der Besinnung und des Gottesdienstes. Die Anbindung an den biblischen Bericht über die Erschaffung der Welt wurde betont.

Heute haben wir bei uns die sog. 5-Tage-Woche für viele (5 Arbeitstage, 2 Tage Wochenende) und allgemein eine weitgehende Reduktion auf das Diesseitige. Die Woche wird nicht als Teil eines Monats angesehen, sondern als vereinbarter gut überschaubarer Zeitraum, aus 7 Tagen zusammengesetzt. Dabei gibt es wöchentliche Rhythmen, z.B. die Stundenpläne der Schüler. Wann haben wir Schwimmen, wann Musik? Andere wöchentlich sich wiederholende Regelungen des Alltags sind: Öffnungszeiten von Geschäften und Schwimmhallen, Markttage, Vorstellungen im Theater, Fleischtage auf dem Wochenplan, Putztage im Haushalt, ... Findet weitere Beispiele.

### 4.5 Ostern und andere bewegliche Feste

Während der 1.Weihnachtstag immer der 25. Dezember ist, bewegt sich der Ostersonntag scheinbar regellos hin und her. Und dabei ist Ostern das höchste und wichtigste Fest für die Christgläubigen.

| Jahr | Ostersonntag |
|---|---|
| 2000 | 23. April |
| 2001 | 15. April |
| 2002 | 31. März |
| 2003 | 20. April |
| 2004 | 11. April |
| 2005 | 27. März |
| 2006 | 16. April |
| 2007 | 8. April |

Wir könnten uns die offenbar schwierige Frage stellen: Wann wird im Jahre 2008 der 1. Ostertag sein?

Natürlich kann unser Ziel nicht sein, die Schülerinnen und Schüler mit der auf unseren Mathematikerfürsten C. F. Gauss zurück gehenden Formel zur Berechnung des Osterdatums bekannt zu machen. Aber sie sollten lernen, dass hier der Mond ins Spiel kommt.

Unsere kurze Liste zeigt ja sicher, dass offenbar Ostern ein Frühlingsfest ist und damit auf Aufbruch, Neubeginn, Wendung zum besseren hin verweist. Wir können genauer vermuten, dass Ostern im März oder April stattfindet.

Tatsächlich hat die christliche Kirche schon im Jahre 325 auf dem Konzil von Nicaea festgelegt: Ostersonntag soll der erste Sonntag nach dem Frühlingsvollmond sein. Dabei ist der Frühlingsvollmond der erste Vollmond nach Frühlingsanfang, also nach dem 20. bzw. 21. März. Für das Jahr 2006 gilt z.B.: Frühlingsanfang Montag, 20. März, Frühlingsvollmond Donnerstag, 13. April, also Ostersonntag 16. April.
Die Bestimmung von Nicaea erlaubt es, den Spielraum für die Lage des Ostersonntags einzugrenzen. Diesen können wir ermitteln.
Das frühest mögliche Datum für den Ostersonntag ist der 22. März, das ist der Fall, wenn am 20. März der Frühling beginnt, am 21. März Vollmond herrscht und der 22. März ein Sonntag ist. Es bleibt zunächst die Frage, ob das wirklich auch eintritt. Im Jahr 2008 werden wir jedenfalls nahe dran sein, da fällt der Ostersonntag auf den 23. März. Wie kannst du das nachprüfen?
Begründe auf ähnliche Art, dass der spätest mögliche Termin für den Ostersonntag der 25. April ist.
Mit Ostern sind weitere kirchliche Feiertage fest verbunden, z.B. das Pfingstfest. Das Wort Pfingsten bedeutet fünfzig (griech. pentekoste = der 50.), der fünfzigste Tag von Ostersonntag an. In unserer Sprache bedeutet das: 7 Wochen nach dem Ostersonntag feiern wir den Pfingstsonntag, im Jahre 2006 z.B. am 4. Juni.
Jetzt kannst du mit dem Datum des Ostersonntags eines bestimmten Jahres eine Menge Fragen stellen und beantworten, z.B. die Frage, ob Christi Himmelfahrt und Fronleichnam beide im Mai liegen können und gleichzeitig der 1. Mai ein Freitag oder Montag ist.

### 4.6 Der Islamische Kalender

Dieses Teilthema sollte uns schon wegen der großen Zahl islamischer Mitbürger interessieren.
Der islamische Kalender ist ein reiner Mondkalender, d.h. das Kalenderjahr ist definiert als die Zeitspanne von 12 Monaten, und der Monat ist astronomisch bestimmt als Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Neumonden, angenähert als Zeitspanne aus 29,5 Tagen. Um – wie es nötig ist – ganze Anzahlen von Tagen für die Monate zu haben, gibt es im islamischen Mondjahr abwechselnd 6 Monate mit 30 und 6 Monate mit 29 Tagen. Somit besteht das reine Mondjahr aus nur 354 Tagen, was unter anderem

bedeutet, dass innerhalb eines Sonnenjahres mit rd. 365,25 Tagen zweimal der Neujahrstag nach dem Mondkalender gefeiert werden kann.

Beispiel: Der 5. Juli 2006 nach unserem, dem Gregorianischen Kalender ist der 8. 6. (Djumada al-Akhira) 1427 im Islamischen Kalender. Im Jüdischen Kalender, der das Sonnenjahr mit dem Umlauf des Mondes kombiniert, fällt dieses Datum auf den 9. 4. (Tammus) 5766.

Der Missklang mit dem sonnenbestimmten Geschehen, wie es von uns hier in Europa erlebt wird, ist beträchtlich.

Nimm einmal an, am heutigen Tage fielen die Neujahrstage nach dem Mondkalender und nach unserem Sonnenkalender zusammen. Was wird dann in den nächsten Jahren geschehen? Fertige eine Skizze wie Abb. 4.6 an. Wann etwa wird die Zahl der Mondjahre um ein Mondjahr größer sein als die der Sonnenjahre? Benutze die Näherungswerte 1 Mondjahr = 354 Tage, 1 Sonnenjahr = 365,25 Tage.

Der berühmteste Monat des islamischen Kalenders ist der neunte, der Fastenmonat Ramadan. Begründe, dass dieser in jede Jahreszeit fallen kann, in den heißen Sommer wie in den kalten Winter, in den schönen Frühling wie in den nassen Herbst. Vergleiche mit unserer Fastenzeit, die nicht nur mondbestimmt, sondern auch sonnenbestimmt ist. (Wieso?)

Natürlich haben die arabischen Völker gewusst, dass 354 Tage ein Näherungswert des Mondjahres ist. Wie lang ist denn ein Mondjahr, wenn man die genaueren Werte 1 Mondmonat = 29 Tage + 12 Stunden + 44 Minuten einsetzt?

Der Unterschied zwischen Kalendermondjahr und astronomischem Mondjahr (fast 9 Stunden!) wurde durch Schaltjahre gemindert. In Zyklen von 30 Jahren fanden 11 Schaltjahre mit je 355 Tagen statt. Wie lang war danach durchschnittlich ein Kalendermonat? Vergleiche das mit dem astronomischen Mondmonat und bewundere die exzellente Näherung.

Im Zuge der gegenwärtigen Globalisierung wird wohl der Gregorianische Kalender überall eingeführt werden. Kemal Atatürk hat das schon im Jahre 1927 für die islamische Türkei auf dem Verordnungswege besorgt.

Allein der Flugverkehr wie aller grenzüberschreitender Verkehr erfordert einen einheitlichen Kalender. Das müsste nicht unbedingt unser Gregorianischer sein, er hat ja, wie wir sahen, viele Ungereimtheiten, die Astronomen benutzen ihn nicht!

Allerdings braucht wohl keine globale Christianisierung auf dem Kalenderwege befürchtet zu werden, da die traditionellen Bindungen von Jahreszeit und kirchlichem Jahr ohnehin von vielen Christen nicht mehr gelebt werden. Der Kalender ist zu einem „weltlich Ding“ geworden. Das mussten schon unsere Auswanderer akzeptieren: Weihnachten als Fest der Geburt Christi liegt für Christen in Australien und in anderen Ländern der Südhälfte eben nicht „mitten im kalten Winter“, und Ostern fällt nicht in die verheißungsvolle Frühlingszeit. Diese Bindungen mussten gelöst werden.
Und wir sind hiermit vom scheinbar harmlosen Thema Kalender in brisante gegenwärtige Auseinandersetzungen über Wirtschaft, Kultur und Religion im Zeitalter der Globalisierung geraten.

# 5 Literatur

Becker, G. u.a. (1979): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht. Heilbronn. Klinkhardt.

Beckmann, A. (2003): Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Teil 1: Ein Modell, Ziele und fachspezifische Diskussion. Hildesheim. Verlag Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. & Walther, G. (2000): Mathematik-Kalender. Leipzig. Friedrich Verlag.

Boschke, F. (1979): Und 1000 Jahre sind wie ein Tag. München. Knaur.

Cazelles, R. & Rathofer, J. (o. Jg): Das Stundenbuch des Duc de Berry, Drei Lilien Edition Wiesbaden

Deutsche Bundesbank (2003): Münzgeldentwicklung in Deutschland, S. 28.

Flindt, R. (1988): Biologie in Zahlen. Stuttgart. Fischer Verlag.

Gallin, P. & Ruf, U. (ab 1995): Sprache und Mathematik – Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab, 3 Bände. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Haldane, J. P. S. (1981): Über die richtige Größe von Lebewesen. In: Mathematiklehrer. Frankfurt. Hirschgraben Verlag, Heft 2, S. 8-10.

Herrmann, D. B. (2000): Faszinierende Astronomie, Lehrbuch für die S I. Berlin. Duden Paetec.

Mütz, K. (1996): Faszination Kalender. Buxheim Eichstätt. Polygon Verlag.

Pflumer, W. (1989): Biologie der Säugetiere. Berlin. Verlag Paul Parey.

Slijper, E. J. (1967): Riesen und Zwerge im Tierreich. Berlin. Verlag Paul Parey.

Sundermann, B., Zerr, M. & Selter, Ch. (2001): Geschichte der Zeitmessung – ein lohnendes Thema für den Unterricht und die Lehrerbildung. In: Selter, Ch., Walther, G. (Hrsg.): Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand. Leipzig. Klett. S. 193-202.

Vogel, C. L. (2001): Warum Elefanten große Ohren haben. Berg. Gladbach. Gustav Lübbe Verlag.

Wagenschein, M. (1980): Naturphänomene sehen und verstehen. Stuttgart. Klett.

Walther, G. (1998): Freitag, der 13. – alle Jahre wieder? In: Praxis Schule, Heft 1, S. 43 -47.

Walther, G. (1995): Mathematik rund um den Kalender, ein integrierendes Thema für den Mathematikunterricht. In: Praxis Schule 5-10, Heft 3, S. 7-13.

Wendorff, R. (1993): Tag und Woche Monat und Jahr. Opladen. Westdeutscher Verlag.

Winter, H. (1987): Menschen und Moneten – Geld pädagogisch gesehen. In: Mathematik Lehren, Heft 20, S. 6-13.

Winter, H.( $1992_2$): Sachrechnen in der Grundschule. Frankfurt a.M. Cornelsen Scriptor.

Winter, H.(1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Heft 61, S. 37-46, 1995.

Winter, H. (2002): Größe und Form im Tierreich. In: Mathematik Lehren, Heft 111, S. 54-59.

Winter, H. (2003): „Gute Aufgaben“ für das Sachrechnen. In: Baum, M., Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Seelze. Kallmeyer Verlag, S. 177-183.

Wittmann, E. (1977): Die Geometrie der Schulmilchtüten und die lokalen Experten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 309 f.

# 6 Anhang

**Aus dem Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“BLK Heft 60, Bonn 1997**

### 3.3 Lernen im Fach und fachübergreifender/ fächerverbindender Unterricht

Das Strukturproblem der Schule, eine akzeptable Balance zwischen systematischem und situiertem Lernen, zwischen Systematik und Kasuistik zu finden, kehrt in besonderer Schärfe in der pädagogischen Diskussion über das Verhältnis vom Lernen im Fach zu fächerverbindendem und fachübergreifendem Unterricht wieder. Von dieser Diskussion ist auch der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht nicht ausgenommen. Die Expertengruppe ist der Überzeugung, dass die Behandlung beider Lernformen als Gegensätze oder konkurrierende didaktische Konzepte nicht nur für die Optimierung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts unangemessen, sondern auch aus didaktischer Perspektive nicht zu rechtfertigen ist. **Je nach angestrebten Zielsetzungen ist fachliches oder fächerverbindendes Lernen notwendig.**

Das Fach hat aus gutem Grund eine zentrale Stellung in unserem Schulwesen, da es die pädagogische Arbeit in mehrfacher Weise bündelt. Das Schulfach ist der Rahmen, in dem außerschulische Stoffe und Probleme überhaupt erst zu Themen schulischen Lernens werden. Das Schulfach definiert eine sachliche und zeitliche Systematik, die nicht primär an einem Strukturentwurf der akademischen Bezugsdisziplin, sondern an Bildungsprozessen und den sie tragenden Leitbildern orientiert ist. Das Schulfach besitzt seine eigene pädagogisch-didaktische Logik. Es erlaubt die Sequenzierung von Stoffen und Themen, ohne einem linearen Ablauf verpflichtet zu sein, den kumulativen Wissensaufbau, individuelle Erfahrung von Kompetenzzuwachs und die begründete Bewertung von Leistungsfortschritten. Dies muss immer wieder auch gegenüber den Fachwissenschaften betont werden, in denen nicht selten die Überzeugung anzutreffen ist, das Schulfach sei die Elementarisierung einer Bezugsdisziplin. Ebenso wenig ergibt sich aus einer Abfolge von Alltagsproblemen – und mögen diese auch gesellschaftliche Schlüsselprobleme sein - kumulatives Lernen. In der Handhabung der Differenz von Schulfach und Fachwissenschaft sowie von Alltagswissen der Schüler und zu vermittelndem Bildungswissen erweist sich eine zentrale professionelle Leistung der Lehrenden.

**So wichtig die Rahmung des Fachs für den systematischen Wissenserwerb ist, so macht sie doch gleichzeitig auf die Grenzen der im Fach stellbaren und beantwortbaren Fragen aufmerksam. Das Fach weist, wenn es reflexiv unterrichtet wird, immer schon über sich selbst hinaus. Dies ist keine Eigenschaft, die der Unterricht erst auf der Oberstufe annehmen kann; sie kann prinzipiell von Anbeginn des gefächerten Unterrichts realisiert werden. Der fächerverbindende und fachübergreifende Unterricht ist nicht nur eine notwendige Ergänzung des Fachunterrichts, sondern Teil dessen Vollendung.** Es liegt der Expertengruppe sehr daran, auf die didaktische Bedeutung jener fächerverbindenden und fachübergreifenden Fragestellungen und Themen hinzuweisen, die aus dem Fach selbst entwickelt werden und die Grenzen des Fachs thematisieren. Denn sie sind die Grundlage der Reflexivität des Fachunterrichts und damit eine der Voraussetzungen für ein wirkliches Verständnis fachlicher Anliegen im Rahmen einer modernen Allgemeinbildung. Fächerverbindender oder fachübergreifender Unterricht, der aus den Fächern selbst entwickelt wird, ist möglicherweise didaktisch anspruchsvoller als die Kooperation verschiedener Fächer in der Bearbeitung eines Alltagsproblems bei der ein Kategorienwechsel zwischen Fächern veranschaulicht wird. Dennoch ist auch diese Mehrperspektivität, für die das Projekt, an dem mehrere Fächer beteiligt sind, exemplarisch steht, eine wichtige Korrektur des Fachunterrichts, da ein vergleichender Blick gleichsam von außen auf das Fach gerichtet wird. Man kann über das rechte Austarieren von fachlichem und fächerverbindendem bzw. fachübergreifendem Unterricht streiten. Je nach Fach, Alter und Vorwissen der Schüler und situativen Bedingungen in der einzelnen Schule sind unterschiedliche Lösungen denkbar. **Kaum strittig ist jedoch, dass die überfachliche Perspektive in unseren Schulen im Allgemeinen zu kurz kommt. Dies gilt insbesondere für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.**

(Hervorhebung Gerd Walther)

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G6)
978-3-89088-185-0