Landesinstitut für Schulentwicklung

Allgemein bildende Schulen

Grundschule

Innovativer Bildungsservice

SINUS Starterpaket

Stuttgart 2013 ▪ SIGS - 01

Landesinstitut für Schulentwicklung

Qualitätsentwicklung und Evaluation

Schulentwicklung und empirische Bildungsforschung Schulentwicklung

Bildungspläne

Redaktionelle Bearbeitung:

Redaktion:	Dr. Ulrike Philipps, Wibke Tiedmann
Autoren:	Christine Dietenmaier, Römerschule Stuttgart Heinz Jansen, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Baden – Württemberg Dr. Kathleen Philipp, Pädagogische Hochschule Freiburg Ute Planz, Grundschule auf der Wanne Tübingen Carolin Schneider, Pfalzgraf-Rudolf-Schule Herrenberg Doris Simon, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (GWHS) Heilbronn Kerstin Sittinger, Südstadt – Grundschule Schwetzingen
Layout:	Wibke Tiedmann, Daniel Walter
Stand:	Dezember 2013

Impressum:

Herausgeber:	Landesinstitut für Schulentwicklung (LS) Heilbronner Straße 172, 70191 Stuttgart Telefon: 0711 6642-0 Telefax: 0711 6642 – 1099 E-Mail: poststelle@ls.kv.bwl.de www.ls-bw.de
Druck und Vertrieb:	Landesinstitut für Schulentwicklung (LS) Heilbronner Straße 172, 70191 Stuttgart Telefon: 0711 66 42-1204 www.ls-webshop.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

herzlich willkommen bei SINUS! Viele neue Grundschulen in Baden-Württemberg wollen sich auf den Weg zur SINUS Grundschule machen. Auch Sie haben sich hierzu entschlossen. Auf diesem Weg möchten wir Sie gerne begleiten und unterstützen.
Am Anfang stehen einige Fragen: Wie sieht es an Ihrer Schule, in Ihrer Klasse, in Ihrem Mathematikunterricht aus? Haben Sie an der Schule schon ein gemeinsames Mathematikprofil entwickelt? Tauschen Sie sich didaktisch und methodisch über den Mathematikunterricht aus? Unterrichten bei Ihnen viele Kolleginnen und Kollegen fachfremd Mathematik? Werden Sie den verschiedenen Begabungen und Potenzialen der Kinder in Mathematik bereits genug gerecht? Können Sie diese zufriedenstellend fördern? Machen Sie sich bereits Gedanken über "gute Aufgaben" im Mathematikunterricht? Beschäftigt Sie die Frage, wie Sie den Kindern einen guten Start im mathematischen Anfangsunterricht ermöglichen können? Wie bereiten Sie im Fach Mathematik auf den Übergang in die weiterführenden Schulen vor? Möchten Sie verstärkt auch die Eltern für Ihre Art des Mathematikunterrichtens gewinnen? – Es gibt viele gute Gründe durchzustarten!
Mit diesem SINUS Starterpaket richten wir uns an alle Schulleitungen und Lehrkräfte, ob "mathematik-studiert" oder "fachfremd-unterrichtend". Es kann Anstöße geben und Gespräche über Unterricht initiieren. Es gibt Umsetzungsbeispiele und verschiedenartige Hilfen und Materialien zu Fragen des Unterrichts – von der ersten bis zur vierten Klasse. Es greift die gängigen Handlungsfelder des Unterrichts auf und gibt „Denkanstöße“, z. B. aus den Bereichen „gute Aufgaben“, Anfangsunterricht, inhaltliche und prozessorientierte Kompetenzen. Sie können individuell an den Bereichen arbeiten, die für Sie oder Ihre Schülerinnen und Schüler gerade aktuell sind. Es ist also nicht von Anfang bis zum Ende "durchzulesen"; Sie entscheiden, an welcher Stelle Sie beginnen und wo Sie weiter lesen und arbeiten wollen.
Unterrichtsentwicklung und -weiterentwicklung ist aber nie Thema nur einer Lehrkraft, sondern betrifft das gesamte Kollegium. Daher gehen wir davon aus, dass dieser Prozess nicht bei Ihnen als einzelner Lehrkraft stehen bleibt, sondern auch Wirkungen im Kollegium zeigen wird. Unterrichtsentwicklung wird so zur Schulentwicklung. Daher finden Sie ebenfalls einen Beitrag, der schulorganisatorische Aspekte beleuchtet. Schule ist mehr als Unterricht. An einem aktiven Schulleben sind verschiedene Personenkreise beteiligt: Es gilt Schülerinnen und Schüler, Lehrerinnen und Lehrer und nicht zuletzt Eltern gleichermaßen anzusprechen. Verändere ich als Lehrkraft meinen Unterricht, ist das nicht nur für mich wichtig. Alle Beteiligten müssen informiert, mehr noch, involviert werden. Der Prozess, die Veränderung muss für alle transparent, nachvollziehbar und umsetzbar sein – ein hoch gesetztes Ziel, gemeinsam zu erreichen. Und wenn die Kinder Mathematik lustvoll betreiben und Freude daran haben, ist das auch für Sie gewinnbringend und zufriedenstellend.
Wir hoffen, dass wir Ihnen mit diesen Beiträgen Unterstützung auf diesem Weg der Unterrichts- und Schulentwicklung geben können.

Ihr Autorenteam

2 Zum Start eine Orientierungshilfe

SINUS steht für **S**te**i**gerung der Effizienz des mathematisch **n**aturwissenschaftlichen **U**nterricht**s**.
Das Besondere an SINUS ist, dass es darum geht, sich gemeinsam auf den Weg zu machen. Gemeinsam bedeutet, gemeinsam mit anderen Lehrerinnen und Lehrern, als Kollegium, über die eigene Schule hinaus, gemeinsam mit anderen Schulen.
Das bietet Ihnen das Starterpaket:

- eine Standortbestimmung: Anhand von Fragen und Denkanstößen erhalten Sie einen schnellen Überblick. Sie erfahren, wo SINUS Gedanken an Ihrer Schule bereits präsent sind und wo Sie diese vertiefen können;
- einen kurzen Blick auf die bereits lange SINUS-Geschichte;
- eine theoretische Einführung in die Philosophie von SINUS: In diesem Grundlagenartikel erfahren Sie, wie SINUS und innovativer Mathematikunterricht zusammenhängen;
- Hilfestellung, wie sich Mathematikunterricht mit SINUS schulorganisatorisch umsetzen lässt;
- "gute Aufgaben", die es Ihnen ermöglichen, gleich morgen den SINUS Gedanken in Ihrem Mathematikunterricht umzusetzen;
- einen Artikel, der einen Beitrag zum "guten Start" im Anfangsunterricht leisten soll.

An Ihrer SINUS Grundschule könnten sich künftig Szenen wie diese abspielen:
Szene 1: Im Klassenzimmer
Die Schülerinnen und Schüler sitzen in Gruppen an ihren Tischen. Es herrscht eine emsige Geschäftigkeit. Thilo erklärt seinen Mitschülerinnen und Mitschülern, wie er auf seine Lösung gekommen ist und welche Überlegungen er angestellt hat.
Szene 2: Im Lehrerzimmer
Eine Gruppe von Lehrerinnen sitzt um einen großen Tisch. In der Mitte liegen verschiedene Mathematikmaterialien. Es wird eifrig über das Pro und Kontra diskutiert. Frau Müller berichtet von ihren Erlebnissen und Erfahrungen mit den unlängst gemeinsam konzipierten Mathematikaufgaben.
Szene 3: Klassenpflegschaftsabend
Das Klassenzimmer ist gut gefüllt. Die Eltern sitzen an Gruppentischen. Sie sind ins Gespräch vertieft. Auf den Tischen liegen Mathematikmaterialien, die die Eltern ausprobieren. Anschließend wird mit der Klassenlehrerin über das Besondere des heutigen Mathematikunterrichts diskutiert.
Szene 4: Im Klassenzimmer
Eine Gruppe von Lehrerinnen und Lehrern der umliegenden Schulen sitzen beisammen. Alle haben Material mitgebracht. Ideen werden ausgetauscht, Erfahrungen geteilt.
Szene 5: Im Lehrerzimmer, am späten Nachmittag
GLK, auf der Tagesordnung steht heute Reflexionen zur Umgestaltung und Öffnung des Mathematikunterrichts.

3 Standortbestimmung - Perspektiven von SINUS

SINUS lässt sich unter verschiedenen Perspektiven betrachten. Indem Sie die folgenden Fragen und Anstöße gemeinsam beantworten, bekommen Sie schnell ein Bild davon, wie viele der SINUS Gedanken an Ihrer Schule bereits präsent und umgesetzt sind. Querverweise auf die Artikel in diesem Starterpaket, die SINUS Module bzw. weitere Materialien ermöglichen Ihnen, genau dort anzusetzen, wo Sie und Ihr Kollegium stehen oder an welcher Stelle Sie sich weitere Entwicklungen vorstellen können.

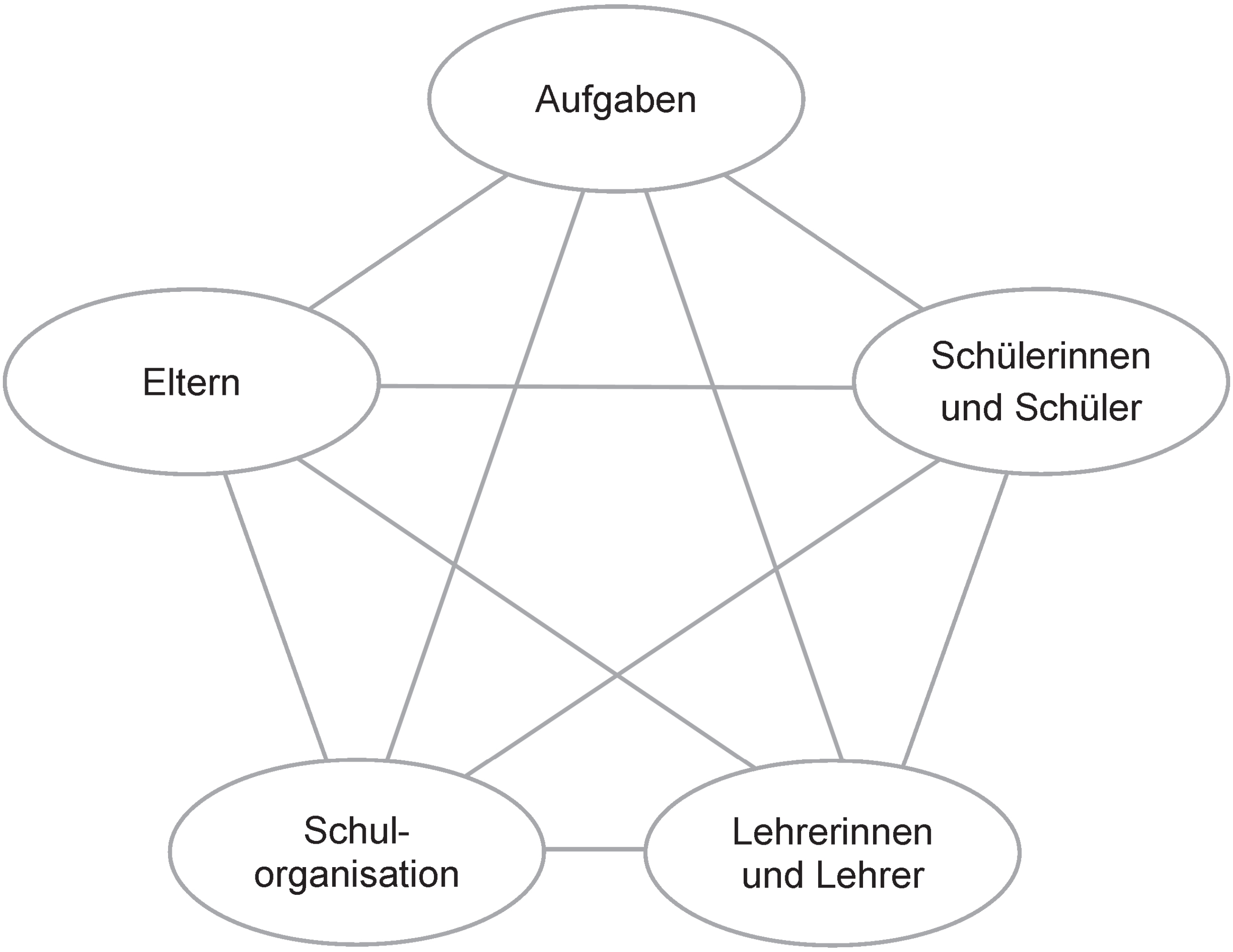


Abbildung 1: Perspektiven von SINUS

3.1 Perspektive: Aufgaben

Mögliche Fragen	**Unsere Antworten und Anmerkungen**
Welche Kriterien für "gute Aufgaben" im Mathematikunterricht gibt es an unserer Schule?	
Wie werden die "guten Aufgaben" im Sinne einer natürlichen Differenzierung eingesetzt?	
Wie sorgen wir dafür, dass es einen Pool an Aufgabenformaten gibt, der sich im Sinne des Spiralprinzips durch alle Schuljahre zieht?	
Wie erreichen wir, dass die Kinder sinnvolle Strategien entwickeln und diese nutzen?	

Zum Einsteigen und Vertiefen

Im Starterpaket:
5.2.1 Gute Aufgaben – Aspekt der Mathematik
5.4.2 Eine andere Sicht auf Lernprozesse
7 "Gute Aufgaben" – Schneller Start mit Zahlenmauern, Rechendreiecken und Rechenketten
Modul 1: Gute Aufgaben (www.sinus-an-grundschulen.de)

3.2 Perspektive: Schülerinnen und Schüler

Fragen und Denkanstöße	Unsere Antworten und Anmerkungen
Welche Methoden setzen wir ein?	
Wie sorgen wir dafür, dass die Kinder sich über Lösungswege austauschen?	
Wie fördern wir das selbständige Arbeiten der Kinder im Mathematikunterricht?	
An welchen Stellen / Wann / Wie können die Kinder im Mathematikunterricht eigene Ideen und Themen einbringen?	
Wie ermöglichen wir den Kindern aktiv-entdeckend tätig zu sein?	

Zum Einsteigen und Vertiefen

Im Starterpaket:
3.2 Perspektive: Schülerinnen und Schüler
7 "Gute Aufgaben" – Schneller Start mit Zahlenmauern, Rechendreiecken und Rechenketten
Modul 2: Entdecken, Erforschen, Erklären (www.sinus-an-grundschulen.de)

3.3 Perspektive: Lehrkräfte

Fragen und Denkanstöße	Unsere Antworten und Anmerkungen
Wer aus unserem Kollegium kennt bereits die Aspekte guten Mathematikunterrichts? Welche Aspekte guten Unterrichts bzw. guten Mathematikunterrichts kennen wir Lehrkräfte?	
Wer tauscht sich wann mit wem aus? Welche Formen des Austauschs über Unterricht sind an unserer Schule etabliert? Welche Zeitfenster sind für den Austausch gesetzt?	
Wie können wir gemeinsam gute Aufgaben(formate) für unsere Klassen entwickeln?	
Wie sind verlässliche Kopfrechen- und Knobelzeiten in unserem Mathematikunterricht verankert?	
Welche Kriterien der Leistungsbewertung gibt es an unserer Schule?	

Zum Einsteigen und Vertiefen

Modul 9: Lernen begleiten – Lernerfolg beurteilen (www.sinus-an-grundschulen.de)

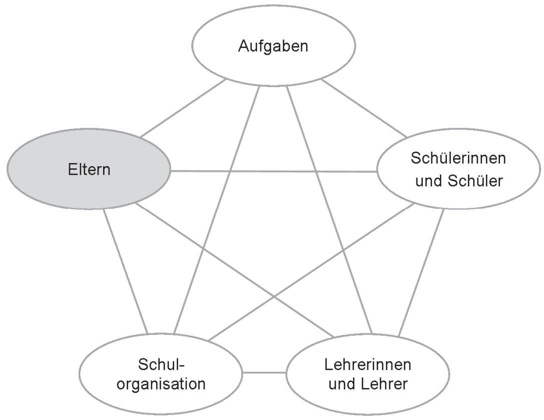
3.4 Perspektive: Schulorganisation

Fragen und Denkanstöße	Unsere Antworten und Anmerkungen
Wann und wie oft führen wir Fachkonferenzen für Mathematik durch? Wer nimmt daran teil? Wie informieren wir das restliche Kollegium?	
Wie können wir für einen gemeinsamen Aufgabenpool sorgen, der für alle zugänglich ist?	
Wie ermöglichen wir kollegiale Hospitationen und kollegialen Austausch?	
Wie definieren wir an unserer Schule Mathematiklernen und guten Mathematikunterricht?	
Wie nutzen wir Kooperationen mit Kindergärten und weiterführenden Schulen für mathematisch relevante Themen?	

Zum Einsteigen und Vertiefen

Im Starterpaket:
6 Schulorganisatorische Maßnahmen
Modul 10: Übergänge gestalten (www.sinus-an-grundschulen.de)

3.5 Perspektive: Eltern



Fragen und Denkanstöße	Unsere Antworten und Anmerkungen
Was wissen die Eltern unserer Schule über guten Mathematikunterricht?	
Wann / Zu welchen Zeitpunkten informieren wir die Eltern über den Mathematikunterricht?	
In welchem Rahmen erhalten Eltern die Möglichkeit, sich über gute Aufgaben zu informieren und diese auch auszuprobieren?	
Welche Unterrichtsmaterialien kennen die Eltern?	
Wie informieren wir die Eltern über die unterschiedlichen Kompetenzen (Fach-, Personal-, Sozialkompetenz)?	

Zum Einsteigen und Vertiefen

www.pikas.tu-dortmund.de

Spiegel, H. / Selter, C.: Kinder & Mathematik: Was Erwachsene wissen sollten. Klett / Kallmeyer, Selze 2011.

4 SINUS-Geschichte und Materialien

SINUS blickt inzwischen auf eine über 15-jährige Geschichte zurück. Es ist eines der größten und längsten Unterrichtsentwicklungsprogramme auf Bundesebene.
Auslöser war die TIMSS-Studie aus dem Jahr 1997. Sie zeigte auf, dass im internationalen Vergleich die Unterrichtsqualität an deutschen Schulen insbesondere im Bereich des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts nicht den Erwartungen entsprach.
1998 wurde daraufhin das Programm zur "**S**teigerung der Eff**i**zienz des mathematisch-**n**aturwissenschaftlichen **U**nterricht**s**" SINUS ins Leben gerufen. Auf SINUS folgte SINUS-Transfer und SINUS an Grundschulen.
Im Lauf der Zeit entstand eine "Schatzkiste" an Modulen, Handreichungen, Materialien, Impulsen und Aufgaben. Die ersten elf Module erschienen im Rahmen von SINUS-Transfer. Sie können auf der Seite www.sinus-transfer.de heruntergeladen werden. Daran angeschlossen ist auch eine Materialdatenbank SINUS-Transfer, die weiterhin genutzt werden kann. Die Module des 2013 beendeten Programms SINUS an Grundschulen finden sich auf der Seite www.sinus-an-grundschulen.de. Weitere Materialien finden sich auf der Seite des Projekts PIK AS unter www.pikas.tu-dortmund.de.

5 Einführung in die Philosophie von SINUS

5.1 Einführung

Der Beitrag „Einführung in die Philosophie von SINUS“ richtet sich an alle Kolleginnen und Kollegen, ob fachfremd unterrichtend oder nicht, die sich mit den Kernfragen und den typischen Herausforderungen des Mathematikunterrichts beschäftigen. Verschiedene Aspekte des guten Unterrichts und guter Aufgaben werden beleuchtet und diskutiert. Die Leitfragen geben Hilfen, den eigenen Unterricht inhalts- als auch prozessbezogen zu öffnen.

Zentrales Moment von SINUS ist die Weiterentwicklung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundschulunterrichts. Lehrerinnen und Lehrer arbeiten im Team an typischen Herausforderungen des Unterrichts. Sie richten ihren Blick auf die individuelle Förderung der Kinder und schaffen eine ausbaufähige Grundlage für das Lernen in der Sekundarstufe. Lehrkräfte dokumentieren und reflektieren ihre Arbeit.
Was sind die typischen Herausforderungen? Im Programm SINUS sind sie in Modulen aufbereitet:

Modul 1: Gute Aufgaben (Basismodul)
Modul 2: Entdecken, Erforschen und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule (Basismodul)
Modul 3: Schülervorstellungen aufgreifen – grundlegende Ideen entwickeln (Basismodul)
Modul 4: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern
Modul 5: Talente entdecken und unterstützen
Modul 6: Fachübergreifend und fächerverbindend unterrichten
Modul 7: Interessen aufgreifen und entwickeln

Modul 8: Eigenständig lernen – gemeinsam lernen
Modul 9: Lernen begleiten – Lernerfolg beurteilen
Modul 10: Übergänge gestalten

Die Beschäftigung mit den Themen der Module erfolgt nicht isoliert und kann nur im Gesamtkonzept Unterricht und Schule gesehen werden. SINUS ist Unterrichts- und Schulentwicklung. So wird in der Beschäftigung mit diesen Themenbereichen auch immer eine Veränderung des Unterrichts angestrebt.
Ausgehend von einem Verständnis der Mathematik als lebendige Wissenschaft und nicht fertiges Produkt, als aktiver, forschender und entdeckender Prozess, muss eine Veränderung des Unterrichts erfolgen. Mathematik ist lebendiges Kulturgut und die Lehre der Muster und Strukturen. Mathematikunterricht zielt zudem auf die Ausbildung und Vernetzung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen. Hierbei steht neben dem individuellen Arbeiten immer auch ein gemeinsames, auf Kommunikation basierendes, sinnstiftendes Lernen. Ein solcher Unterricht weckt Freude, zielt auf Motivation und Anstrengungsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler.
Aufgabe des Mathematikunterrichts aller Schuljahre ist es, Schülerinnen und Schüler für den mathematischen Gehalt alltäglicher Situationen und alltäglicher Phänomene sensibel zu machen und sie zum Problemlösen mit mathematischen Mitteln anzuleiten. Durch schulisches Lernen und Arbeiten erwerben die Kinder mathematisches Wissen und Können und lernen dieses zu nutzen. Es gelingt ihnen immer besser, allein und mit anderen, individuelle und gemeinsame Lösungswege und Antworten für Fragen und Probleme zu finden. Der Mathematikunterricht knüpft an die unterschiedlichen Vorerfahrungen und Denkstrukturen der Kinder an. Im Laufe der Grundschulzeit befähigt der Mathematikunterricht die Kinder zum „Mathematisieren".
Spricht man von Unterrichtsentwicklung, so ist dies in erster Linie die Aufgabe derer, die unterrichten. Unterrichtsentwicklung zielt auf die Veränderung der Lehrmethoden und Lehr-Lern-Szenarien, die Effektivierung der Klassenführung, die Stärkung fachlicher, didaktischer und diagnostischer Kompetenzen der Lehrkräfte, die Optimierung des Lehrmaterials mit dem Ziel, die Wirksamkeit des eigenen Unterrichts zu steigern und auch auf den Umgang mit Ergebnissen aus zentralen Lernstandserhebungen. Daraus lässt sich nach Helmke das Fazit ziehen: Unterrichtsentwicklung wird wirksam durch ggf. verändertes Verhalten der Lehrkräfte (nach Helmke 2009).

5.2 Herausforderung des Unterrichts – gute Aufgaben

Beschäftigt man sich mit „guten Aufgaben", so muss zunächst geklärt werden, was darunter zu verstehen ist. Konsens besteht in folgenden Punkten:

- Als gute Aufgaben werden Problemaufgaben mit Herausforderungen jenseits einfacher Routine gesehen.
- Gute Aufgaben regen Einsichten in mathematische Strukturen und Gesetze an oder ermöglichen das Mathematisieren außermathematischer Situationen.
- Gute Aufgaben bieten ein reichhaltiges Potenzial für Frage- und Lösungsmöglichkeiten, für Diskussionen und Argumentationen, für Fortführungen und Variationen.

Deutlich hervorgehoben werden muss aber auch, dass es gute Aufgaben an sich nicht gibt. Aufgaben und deren Behandlung müssen unter den verschiedenen Aspekten, also der Mathematik, des Lerners bzw. der Lernerin, der Lehrperson und des Unterrichts gesehen werden. Hier ergibt sich ein Spannungsfeld.

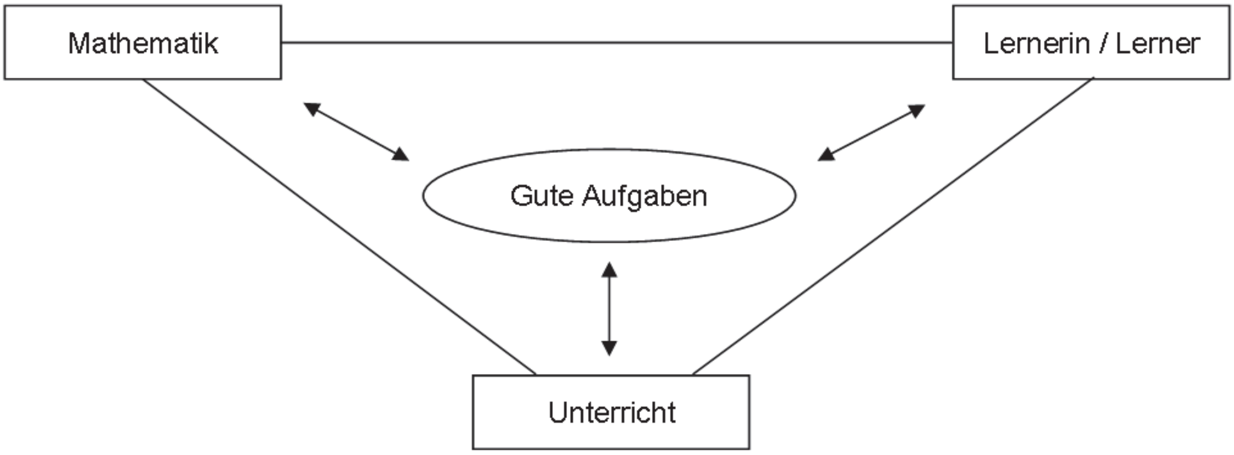


Abbildung 2: Gute Aufgaben

5.2.1 Gute Aufgaben – Aspekt der Mathematik

Aus Sicht der Mathematik ergeben sich Anforderungen an gute Aufgaben. Die Aufgaben sollten:

- Einblicke in fachliche Zusammenhänge ermöglichen;
- mathematische Grundstrukturen eröffnen;
- verschiedene Lösungswege zulassen;
- mit Hilfe verschiedener Repräsentationsmodi bearbeitet werden können;
- Variationen der Aufgabenstellung zulassen;
- das Lernen fachspezifischer Verfahren und Methoden unterstützen.

Diese Anforderungen sind im Hinblick auf das Ziel der Verfügbarkeit eines intelligenten, flexiblen und einsetzbaren Wissens zu sehen.

5.2.2 Gute Aufgaben – Aspekt der Lernerinnen und Lerner

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunehmend über die verschiedensten Kompetenzen verfügen:

- Sachkompetenz;
- Selbstkompetenz;
- Sozialkompetenz;
- Methodenkompetenz;
- Kommunikative Kompetenz.

Bei der Ausprägung der verschiedensten Kompetenzen geht es darum, dass die Lernkompetenz als solche ausgebildet wird.

5.2.3 Gute Aufgaben – Anforderungen an das Unterrichtsarrangement

An die Gestaltung von Unterricht ergeben sich folgende Anforderungen:

- Transparenz über das Ziel (der Unterrichtsstunde / Aufgabe);
- Aufgabenstellung;
- Prozess- und Ergebnisorientierung;
- Freiräume;
- Strukturierte Lernumgebung;
- Veränderte Lehrerrolle.

5.2.3.1 Strukturierte Lernumgebung

Nach Hirt / Waelti ist eine Lernumgebung für den Mathematikunterricht im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung der guten bzw. substanziellen Aufgaben. Eine Lernumgebung ist eine flexible große Aufgabe.
Sie besteht in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen, die durch bestimmte Leitgedanken zusammengebunden sind.
Spricht man von einer substanziellen Lernumgebung, so müssen nach Hirt / Waelti bestimmte Kriterien erfüllt sein:

- mathematische Substanz mit sichtbar werdenden Strukturen und Mustern (fachliche Rahmung);
- Orientierung an zentralen Inhalten;
- hohes kognitives Aktivierungspotenzial;
- Orientierung der Tätigkeiten an mathematischen Inhalten und Prozessen;
- Initiierung von Eigentätigkeit aller Lernenden;
- Förderung individueller Denk- und Lernwege sowie eigener Darstellungsformen;
- Zugänglichkeit für alle: Ermöglichen mathematischer Tätigkeit auch auf elementarer Ebene durch die Möglichkeit, an Vorkenntnisse anknüpfen zu können;
- Herausforderungen für Schnelllernende mit anspruchsvolleren Aufgaben;
- Ermöglichen des sozialen Austauschs und des Kommunizierens über Mathematik.

5.3 Herausforderungen des Unterrichts – mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten – Entdecken, Erforschen, Erklären im Mathematikunterricht

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) gehen davon aus, dass Mathematiklernen in der Grundschule mehr umfasst als die Aneignung von Kenntnissen wie z. B. die auswendi-

ge Verfügbarkeit der Einmaleinsaufgaben oder von Fertigkeiten, wie die geläufige Beherrschung des Verfahrens der schriftlichen Addition.
Neben dem Erwerb der inhaltsbezogenen Kompetenzen ist die Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenzen zu beachten. Hier ist das Erforschen, Entdecken und Erklären anzusiedeln.

5.3.1 Ein anderes Bild von Mathematik

Nach Freudenthal (1982) ist Mathematik keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung. Diese Geisteshaltung lernt man im Tätigsein, indem man Probleme löst, allein oder in seiner Gruppe.
Devlin nennt die Mathematik die Wissenschaft von den Mustern. Das Wort Muster wird hier vielschichtig gesehen, es steht stellvertretend für Begriffe wie Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammenhänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten. Durch Beschäftigung mit Mathematik lernt man die Welt zu ordnen.
Mathematische Muster dürfen nicht als fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Ganz im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann (Wittmann, 2003, S. 26).
Selbstredend geht es nach wie vor im Mathematikunterricht der Grundschule um das sichere Beherrschen der Einmaleinsreihen oder der schriftlichen Addition, also auch um Rechenfertigkeit – um Fähigkeiten und Kenntnisse – wesentlicher aber ist die Schulung prozessbezogener Kompetenzen, d. h. das Entdecken, Beschreiben, Erfinden, Untersuchen, Fortsetzen, Abwandeln, ... von Mustern.

5.3.2 Prozessbezogene Kompetenzen

Was sind prozessbezogene Kompetenzen? Sie beziehen sich auf Prozesse mathematischer Aktivität, auf die eigene mathematische Tätigkeit und grenzen sich somit von den Produkten der mathematischen Aktivität und den Resultaten der Lernanstrengung ab.
Die KMK verwendet die fünf Begriffe "Problemlösen", "Kommunizieren", "Argumentieren", "Modellieren" und "Darstellen" um die prozessbezogenen Kompetenzen zu beschreiben, die Kinder bis zum Ende der Grundschulzeit erwerben sollen:

Problemlösen

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden;
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, z. B. systematisch probieren;
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.

Kommunizieren

- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren;

- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden;
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.

Argumentieren

- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen;
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln;
- Begründungen suchen und nachvollziehen.

Modellieren

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen;
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen;
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren.

Darstellen

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen;
- eine Darstellung in eine andere übertragen;
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.

5.3.3 Aufgaben des Mathematikunterrichts

Anwendungs- und Strukturorientierung – oder: Zahlen sind interessant

Mathematik sollte Mathematik in Kontexten sein. Dies können Kontexte mit, wie auch solche ohne Wirklichkeitsbezug sein. Innerhalb solcher substanzieller Kontexte „lassen sich vielfältige Aufgaben zur Erforschung innermathematischer und außermathematischer Muster formulieren. Diese Aufgaben können von unterschiedlichen Voraussetzungen aus und auf verschiedenen Wegen bearbeitet werden, so dass individueller Spielraum für Eigentätigkeit besteht“ (Wittmann, 2003, S. 29).

Aufgaben- und Methodenorientierung – oder: Die Einbettung ist bedeutsam

Nicht jede gute Aufgabe ist sofort schlüssig und verständlich. Aber sie fasziniert, bindet das Interesse der Kinder und motiviert den Einstieg zu finden, gegebenenfalls auch gemeinsam. Es kommt also auf den richtigen Einstieg an.
Klug ausgewähltes Material, das Bereitstellen von Strukturierungshilfen, Veranschaulichungen etc. ermöglichen es jedem Kind, seinen individuellen Zugang in das Problem oder die Aufgabenstellung zu finden.

Hilfreich hierfür ist eine gewisse zuversichtliche Grundhaltung der Kinder, die es ab dem ersten Schuljahr anzubahnen und aufzubauen gilt. Förderlich dabei ist auch eine authentische Begeisterung der Lehrkraft für diese Vorgehensweise, wie deren didaktische Kompetenz, herausfordernde und ergiebige Aufgabenstellungen auszuwählen und aufzubereiten.

Kompetenzorientierung – oder: Kinder sind kompetent

Ein guter Unterricht zeichnet sich auch durch eine positiv-optimistische Grundeinstellung gegenüber dem Denken und Lernen der Kinder aus. Der Unterricht sollte auf die Entwicklung von Kompetenzen der Kinder, also primär mit Blick auf vorhandene Fähigkeiten und Potenziale und nicht nur auf vorhandene Defizite ausgerichtet sein. Fehler können in diesem Kontext besonders dienlich sein, "denn richtig ist, dass Fehler

- notwendige Begleiterscheinungen von Lernprozessen sind,
- fast immer auf vernünftigen Überlegungen basieren,
- oft als ein Zeichen einer individuellen, kreativen Vorgehensweise gedeutet werden können,
- als unterschiedliche Annäherungen an Erkenntnis und Einsicht anzusehen sind,
- sehr häufig sinnvolle Lösungsansätze enthalten, an die im Unterricht (z. B. in Rechen- bzw. Strategiekonferenzen) angeknüpft werden kann und
- vorzüglich qualitativ zur Diagnose von Lernschwierigkeiten genutzt werden können" (Schipper, 2004, S. 21).

Es muss eine Lernatmosphäre geschaffen werden, in der Fehler selbstverständlicher und bisweilen erwünschter Bestandteil des Mathematikunterrichts sind. Eine gute Fehlerkultur kann Potenziale der Kinder freisetzen.

Fach- und Kindorientierung – oder: Kinder sind Entdecker

Lernen ist ein stets aktiver, konstruktiver, individueller Prozess. Kinder sind Entdecker – auch in der Mathematik. Eine verstärkte Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen ist somit nicht nur aus fach- sondern auch aus kindorientierter Perspektive erforderlich.

5.4 Herausforderung des Unterrichts – Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Zielorientierung

Dieser konstruktivistischen Sichtweise auf das Mathematiklernen, das als ein Prozess der eigenen, zugleich sozial vermittelten Konstruktion von Wissen verstanden wird, stehen Inhalte entgegen, die sich der Entdeckung der Kinder weitgehend entziehen, weil sie mehr oder weniger willkürliche Konventionen enthalten, die nicht entdeckt werden können. Zu diesem Spannungsfeld zwischen Kindorientierung und Sachorientierung kommt noch ein weiteres Spannungsfeld hinzu: Intervention und Konvention, die Frage nach der Offenheit und der Zielorientierung. Der Mathematikunterricht verlangt einerseits nach Offenheit gegenüber den unterschiedlichen Lernwegen der Kinder, andererseits eine klare Zielperspektive und die Kompetenz, den Weg des Kindes zum mathematischen Ziel erfolgreich zu unterstützen.

5.4.1 Öffnung des Unterrichts

Öffnung des Unterrichts ist ein Qualitätsmerkmal der Arbeit in der Grundschule. Wir unterscheiden verschiedene Formen der Öffnung.

5.4.1.1 Organisatorische Öffnung

Öffnung des Unterrichts durch den Aufbau von Stationen oder der Hereinnahme einiger mathematischer Arbeitsblätter in den Wochenplan ist nicht zwangsläufig ein Qualitätsmerkmal. Häufig versteckt sich dahinter ein Aktionismus, der den Kindern keine Chancen eröffnet, ihre mathematischen Kompetenzen (z. B. ihr Wissen über die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Malaufgaben) zu vertiefen. Die Öffnung des Mathematikunterrichts muss eine Offenheit, als Grundhaltung dem kindlichen Mathematiklernen gegenüber sein. Diese tiefgehende Form der Offenheit ist dann auch viel einfacher mit einer klaren Zielorientierung zu verbinden, als die nur organisatorischen Formen der kindlichen Beschäftigung. Eine Öffnung den Denk- und Lernwegen gegenüber beginnt erst, wenn diese Organisationsformen in einen Unterricht integriert werden, der sowohl inhalts- als auch prozessbezogen geöffnet ist.

5.4.1.2 Inhaltsbezogene Öffnung

Ein inhaltsbezogen offener Mathematikunterricht verzichtet auf starre Detailfestlegungen, z. B. auf fixe Zahlenraumgrenzen oder auf unflexible Zuweisungen von Unterrichtsinhalten an bestimmte Schuljahre. Er reduziert die Anzahl der Routineübungen und ersetzt sie zunehmend durch herausfordernde Aufgaben. Er gibt Gelegenheit für ein „Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen" (Schütte 1994) und stellt beziehungshaltige und fortsetzbare Probleme mit mathematischer Substanz in den Mittelpunkt des Unterrichts.
Größere inhaltsbezogene Öffnung bedeutet aber auch größere Verantwortung für die Lehrkräfte bei der Auswahl der Inhalte, denn sie trifft die konkrete Entscheidung für die Auswahl eines mathematischen Unterrichtsinhalts und die Gestaltung der einzelnen Aufgaben. Die folgenden Fragen können bei der Entscheidung helfen.

Leitfragen zur inhaltsbezogenen Öffnung des Mathematikunterrichts
• Sind die von Ihnen ausgewählten Aufgaben problem- und beziehungshaltig? Welche Mathematik steckt in ihnen? Welche Anwendungsbereiche helfen diese Aufgaben zu erschließen? • Welche für Ihre SchülerInnen möglichen Entdeckungen von Mathematik erlauben die Aufgaben? Wie werden Ihre SchülerInnen ihre Entdeckungen vermutlich präsentieren? • Welchen Beitrag zur Vertiefung bzw. Erweiterung des geometrischen, arithmetischen bzw. sachrechnerischen Verständnisses leisten Ihre Aufgaben? • Wie sind Ihre Aufgaben in das System der inhaltsbezogenen Standards für den Mathematikunterricht in der Grundschule einzuordnen? Welche zentralen mathematischen Ideen können mit Hilfe dieser Aufgaben gefestigt werden? • An welche Vorkenntnisse knüpfen Ihre Aufgaben an? Wie reaktivieren Sie diese Vorkenntnisse?

• Sind Ihre Aufgaben geeignet, bisher erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten zu strukturieren und mit anderen Wissens- und Fertigkeitselementen zu verzahnen? • Für welche Themen/Inhalte des weiterführenden Mathematikunterrichts sind die anhand Ihrer Aufgaben erworbenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten notwendige Voraussetzung? • Welche Aufgabenvariationen sind geeignet, die von den Kindern anhand Ihrer Aufgaben gewonnenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten zu stabilisieren und zu vertiefen? • Wie prüfen Sie, ob die mit der Behandlung der Aufgabe verbundenen Ziele erreicht wurden? Wie prüfen Sie insbesondere das Verständnis, nicht nur die Fertigkeit? • Wie sieht eine Fortsetzung Ihrer Aufgaben mit dem Ziel einer Erweiterung der bisher gewonnenen Erkenntnisse aus?

Tabelle 1: aus Schipper, Modul 3, S. 13f

5.4.1.3 Prozessbezogene Öffnung

Mathematiklernen ist ein Prozess der eigenen, aktiven und zugleich sozial vermittelten Konstruktion von Wissen. In erster Linie bestimmen daher die Prozesse der kindlichen Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen, wie erfolgreich Mathematiklernen stattfindet. Diese Prozesse müssen im Unterricht erlernt werden; sie sind Ziele und Gegenstand des Mathematikunterrichts zugleich. Das bedeutet, dass den Kindern nicht nur individuelle Wege der Lösung von mathematischen Problemen gestattet werden, dass ihnen nicht nur gestattet wird, über Mathematik miteinander und mit ihrer Lehrerin / ihrem Lehrer zu kommunizieren, sondern dass diese Prozesse herausgefordert und im Unterricht thematisiert werden. Dies kann mit folgenden Fragen angeregt werden:

Einige wichtige Fragen im Mathematikunterricht
• Wie hast du die Aufgabe gelöst? • Wer hat die Aufgabe auf die gleiche Weise gelöst, wer auf eine andere Weise? • Verstehst du, wie Lara die Aufgabe gelöst hat? • Was ist an der Lösung von Lara anders als an deiner Lösung, was ist gleich? • Welcher Weg ist kürzer, welcher länger? Bei welchem Weg muss man sich mehr merken, bei welchem mehr aufschreiben? • Hätte man es auch noch ganz anders machen können? • Was geschieht, wenn...?

Tabelle 2: aus Schipper, Modul 3, S. 14

Für eine gelingende prozessbezogene Öffnung des Unterrichts können die folgenden Fragen unterstützend sein.

Leitfragen zur prozessbezogenen Öffnung des Mathematikunterrichts
• Welche herausfordernde Aufgabe mit welchem konkreten inhaltlichen Kontext halten Sie für geeignet als Einstieg in den von Ihnen gewählten Themenbereich? • Welche individuell unterschiedlichen Herangehensweisen an die Aufgabe erwarten Sie von den Schülern? Welche Vorgehensweisen der Kinder sind fortsetzbar, welche führen in eine Sackgasse? Welche Alternativen können Sie aufzeigen? • Erlauben Ihre Aufgaben eine innere Differenzierung in dem Sinne, dass die gleichen Aufgaben von verschiedenen Schülern auf unterschiedlichem Niveau bearbeitet werden können? • Welche Fragen bzw. Anregungen sind geeignet, ein vertieftes Nachdenken der Kinder und ein Konzentrieren auf den mathematischen Kern der Aufgaben herauszufordern? • Welche Inhalte sollten Ihrer Ansicht nach Gegenstand der Rechen- bzw. Strategiekonferenz

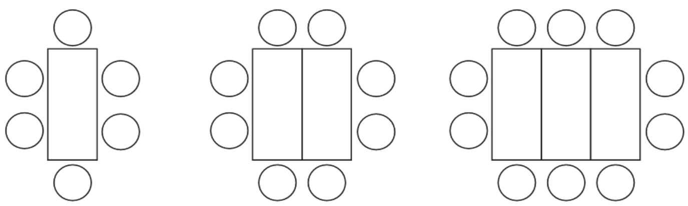
sein? • Welche Aspekte wollen Sie in der Zusammenfassung der wesentlichen Unterrichtsergebnisse besonders betonen? • Sind Ihre Aufgaben in besonderer Weise geeignet, Interaktion und Kommunikation zwischen den Schülern zu fordern und zu fördern? • Welche Sozialformen sind für eine Bearbeitung der Aufgaben geeignet? Favorisieren Sie eine Form oder streben Sie bewusst Vielfalt der Sozialformen an? • Welche Schwierigkeiten bei der Interaktion und Kommunikation der Schüler untereinander erwarten Sie? Welche Hilfen können Sie geben? • In welcher Form sollen die Ergebnisse der Strategiekonferenz zusammengefasst werden? Planen sie selbst eine zusammenfassende Darstellung? Sollen die Schüler ihre Ergebnisse dokumentieren? In welcher Form?

Tabelle 3: aus Schipper, Modul 3, S. 16

5.4.2 Eine andere Sicht auf Lernprozesse

Eine Aufgabe ist nicht an und für sich gut oder schlecht. Es ist die Frage der Perspektive und der Herangehensweise: eher inhaltlich oder eher prozessbezogen. Schauen Sie sich die folgende Aufgabe (aus Radatz u. a. 1999, S. 49) an.

Tische und Stühle
Die ersten Bilder zeigen, wie viele Stühle man aufstellen kann, wenn Sechser-Tische an der langen Seite zusammengestellt werden.



Übertrage die Ergebnisse in die Tabelle:

Tische	1	2	3	4	5	
Stühle	6	8				

Kannst du die Tabelle fortsetzen, ohne neue Bilder zu malen? Wie viele Stühle kann man aufstellen, wenn man zehn Tische aneinander stellt? Wie viele Tische brauchen wir für 44 Stühle? Kannst du dein Ergebnis begründen?

Die folgenden Szenen sollen verdeutlichen, welches Potential in dieser Aufgabe steckt und wie dieses im Unterricht zum Tragen kommen kann.

Szene 1: Konkret handelnder Zugang im Klassenverbund
In der Mitte vor der Tafel steht ein Tisch mit 6 Stühlen. Er ist gedeckt für eine Geburtstagsfeier. Die

Kinder stehen im Halbkreis um den Tisch. Gemeinsam überlegen sie, wie viele Tische benötigt werden, wenn statt sechs Kindern acht oder zehn Kinder eingeladen sind.

Szene 2: Handelnder Zugang mit Anschauungsmaterial in Kleingruppen
Die Schülerinnen und Schüler sitzen in Kleingruppen an Tischen. In der Mitte liegen rechteckige Kartonabschnitte und runde Rechenplättchen. Gemeinsam erarbeiten sie anhand des Materials die Anzahl der benötigten Stühle für vier, fünf und sechs Tische. Dann überlegen sie gemeinsam wie die Lösung für weitere Tische aussehen könnte und halten ihre Lösungsansätze und Überlegungen schriftlich fest.

Szene 3: Präsentation von Gruppenergebnissen
Die Kinder sitzen im Halbkreis, vor der Tafel stehen zwei Kinder und präsentieren ihre Plakate. Auf dem ersten Plakat sind quadratische Tische zu sehen und die dazu passende Tabelle. Sie erklären, wie sie auf ihre Lösung gekommen sind. Auf dem zweiten Plakat sind trapezförmige Tische. Auch hierzu erläutern sie den anderen Kindern ihre Überlegungen und Rechnungen.

Anhand der Szenen wird deutlich, dass die Aufgabe von Radatz derart ausgestaltet werden kann, dass die Kinder aktiv und in Kooperation Mathematik betreiben.
Selbstverständlich heißt das nicht für den Mathematikunterricht, dass die inhaltsbezogenen Kompetenzen keine Rolle spielen. Mathematikunterricht benötigt sowohl die inhalts- als auch die prozessbezogene Sichtweise. „Es gibt Inhalte, die aufeinander aufbauen und deshalb auch recht systematisch und lehrgangsmäßig behandelt werden müssen“ (Schipper, Modul 3, S. 24). Es gilt also die richtige Balance zu finden.
„Wenn Lehrerinnen und Lehrer sowie die Kinder erst einmal gelernt haben, mit herausfordernden Aufgaben und Rechenkonferenzen umzugehen, dann besteht die große Chance, das Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung nicht nur im Kontext besonderer Aufgaben zu nutzen, sondern zu einem allgemeinen Prinzip des gesamten Mathematikunterrichts werden zu lassen. Unter Verweis auf empirische Befunde, die zeigen, dass dieses Prinzip besonders bei Aufgaben zum (gestützten) Kopfrechnen und bei solchen mit Realitätsbezug erfolgreich ist, fordern Spiegel und Selter (2003, S. 59) die fortschreitende Mathematisierung als durchgehendes Unterrichtsprinzip und geben dafür eine dreifache Erklärung: „Für uns stützt dieser Befund – neben anderen Erkenntnissen – die Forderung, dass sich der Unterricht am Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung orientieren sollte. Das bedeutet...

- die Schüler dazu zu ermutigen, bei der Bearbeitung von Kontextaufgaben oder anderen für sie sinnvollen Aufgaben ihr (Vor-)Wissen zu zeigen; die informellen Schülerlösungen bilden den Ausgangspunkt des Unterrichts (das ‘Individuelle’, wie mache ich es?);
- die Schüler dazu anzuregen, über ihre eigenen Vorgehensweisen zu reflektieren und diese mit anderen zu vergleichen (das ‘Soziale’, wie macht ihr es?);
- die Schüler dabei zu unterstützen, zunehmend elegantere, effizientere und weniger fehleranfällige Rechenmethoden zu erwerben (das ‘Reguläre’: Wie macht man es? Oder: Wie kann man es machen – und wie noch?).“ (ebd., S. 25)

Literatur

- Freudenthal, H.: Mathematik – eine Geisteshaltung. In: Die Grundschule (4) 1982. S. 140-142
- Helmke, A.: Unterrichtsentwicklung und Lehrerprofessionalität. Klett / Kallmeyer, Seelze 2009.
- Hirt U. / Waelti, B: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett / Kallmeyer, Seelze 2010.
- KMK – Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. Luchterhand, München, Neuwied, 2005.
- Walther, G.: SINUS-Transfer Grundschule, Mathematik Modul 1: Gute und andere Aufgaben. Kiel, 2004.
- Radatz, H. / Schipper, W. / Dröge, R / Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht – 3. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1999.
- Schipper, W.: Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Zielorientierung. Basispapier zum Modul 3: Schülervorstellungen aufgreifen – grundlegende Ideen entwickeln. Kiel, 2004
- Selter, C.: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Kiel, 2004.
- Spiegel, H. / Selter, C.: Wie Kinder Mathematik lernen. In: Baum, M. / Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch. Kallmeyer. Seelze 2003.
- Wittmann, E. C.: Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In: Baum, M. / Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch. Kallmeyer. Seelze, 2003.

6 Organisatorische Unterstützungsmöglichkeiten für SINUS Profil

SINUS Profil verfolgt das Ziel der qualitativen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts an Grundschulen. SINUS Profil beinhaltet einen schulischen Entwicklungsprozess, der durch einen förderlichen Organisationsrahmen unterstützt werden kann.

Nationale wie internationale Untersuchungen haben aufgezeigt, dass hinsichtlich der Förderung von Kindern mit größeren Schwierigkeiten aber auch jenen mit besonderen mathematischen Begabungen noch Förderbedürfnisse bestehen.
Im Rahmen der Projekte "SINUS Transfer (2005-2009)" und "SINUS an Grundschulen (2009-2013)" haben sich bislang 40 Grundschulen auf den Weg gemacht, den Mathematikunterricht unter besonderen didaktisch-methodischen Blickwinkeln zu analysieren, zu reflektieren und weiter zu entwickeln. In den kommenden Schuljahren sollen die im SINUS Projekt und an den SINUS Grundschulen gewonnenen Erfahrungen für einen weiteren Transfer genutzt werden.

SINUS Profil bietet keine methodisch-didaktischen Rezepturen an, die sich im Sinne eines "copy and paste" unreflektiert und zielsicher im Unterricht umsetzen lassen. Mit der SINUS Profilarbeit verbindet sich vielmehr eine team- und prozessorientierte Schulentwicklung, die in kollegialer Zusammenarbeit eine qualitative Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts anzielt und sich dabei exemplarisch mit relevanten Fachfragen oder Problemstellungen befasst.
Vor diesem Hintergrund sind nicht nur Überlegungen lohnenswert, wie die Kompetenzorientierung des Bildungsplans und die damit verbundenen Standards methodisch-didaktisch effizient umgesetzt werden können. Daneben sind auch die schul- und unterrichtsorganisatorischen Rahmenbedingungen zu reflektieren, die diese Prozesse unterstützen könnten.

6.1 Rolle der Schulleitung

Die bisherige SINUS Projektarbeit hat gezeigt, dass die Unterstützung durch die Schulleitung für diese Art der qualitativen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts sehr wichtig ist. Besonders förderlich ist es, wenn die Schulleitung aktiv in diese Prozesse involviert ist. Die hierdurch unmittelbar gewonnenen Erkenntnisse erleichtern es, konstruktive Nachjustierungen zu initiieren, im kollegialen Miteinander zu diskutieren, zu erproben und ihre Wirkungen zu reflektieren.

6.2 Lehrauftragsverteilung

Der IQB Ländervergleich 2011 hat darauf hingewiesen, dass das Fach Mathematik in der Grundschule zu einem nicht unbeträchtlichen Maße fachfremd unterrichtet wird (Klassenstufe 4: 44,9 Prozent). Im Kontext der Lehrauftragsdispositionen erscheint es daher angezeigt, die im Kollegium vorhandenen mathematischen Kompetenzen zu klären und ihren Einsatz gegebenenfalls zu optimieren.
Die Arbeit im SINUS Profil wird sich auf Dauer nicht auf einzelne Lehrkräfte oder einzelnen Klassen beschränkt lassen. Neben den horizontalen Kommunikationsebenen sind ebenso die vertikalen mit zu bedenken. Schülerinnen und Schüler, die das Arbeiten im SINUS Profil erfahren haben, sollten an der Schule im Falle eines Lehrerwechsels keinen methodisch-didaktischen Bruch erleben. Die Planung des Lehrereinsatzes sollte daher umsichtig und vorausschauend vorgenommen werden. Für die SINUS Einstiegsphase ist deshalb anzuraten, möglichst mehrere Lehrkräfte im Starterteam vorzusehen.

6.3 Unterrichtsorganisation

Die Prozesse der qualitativen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts werden umso dynamischer, je mehr Möglichkeiten für die Gewinnung von gemeinsamen Unterrichtserfahrungen und der Kommunikation zwischen den Lehrkräften geschaffen werden.
Die Parallelisierung des Mathematikunterrichts bietet einen günstigen Rahmen, die angestrebten mathematischen Prozesse gemeinsam zu planen, ihre Umsetzung kooperativ zu gestalten und im Nachgang zu reflektieren. In temporären, klassenübergreifenden (bis hin zu klassenstufenübergreifenden) Gruppierungen oder Projekten können innerhalb der Kontingentstundentafel unterschiedliche Formen der Mathematikförderung umgesetzt werden. Die hier investierte Zeit wird sich bald in

einer größeren Lernmotivation der Kinder und einer größeren Arbeitszufriedenheit der Lehrkräfte niederschlagen.
Auch lohnt es sich zu überprüfen, ob und inwieweit sich zusätzliche Stunden für Differenzierungs- und Förderangebote durch eine unterrichtsorganisatorische Optimierung der Kontingentstundentafel (z. B. bei Sport- und Religionsgruppierungen) gewinnen lassen. Die staatlichen Schulämter sind gerne bereit die Schule hierbei zu beraten.

6.4 Lehrerfortbildung

Gemäß den "Leitlinien zur Fortbildung und Personalentwicklung an Schulen in Baden-Württemberg" vom 11. November 2009 kann es auch angezeigt sein, ein im Fach Mathematik erkanntes Kompetenzdefizit durch gezielte Fortbildungswahrnehmungen zu kompensieren. Dass hierbei die an einer Fortbildung teilnehmenden Lehrkräfte für den entsprechenden Erkenntnistransfer in der Schule sorgen, versteht sich von selbst.
Die regionalen SINUS Koordinatoren stehen den Grundschulen als Ansprechpartner zur Seite und werden auf regionaler Ebene Lehrerfortbildungen anbieten können.
Auch die "älteren" SINUS Grundschulen sind gerne bereit, neu einsteigende Grundschulen zu beraten und ihre Erfahrungen im Aufbau eines schulspezifischen SINUS Profils weiterzugeben. Der schulübergreifende Erfahrungsaustausch hat sich im SINUS Projekt als besonders wertvoll erwiesen.

6.5 Organisation von SINUS Profil

Die Organisationsstruktur von "SINUS Profil an Grundschulen" beinhaltet zwei Ebenen:

- Zentrale Koordination am Landesinstitut für Schulentwicklung
- Regionale Koordination auf der Ebene der Schulamtsbezirke

Die Aufgaben der **zentralen SINUS Profil Koordination** sind:

- Projektbetreuung und -entwicklung
- Kontakte und Kooperationen
- Fortbildung im Rahmen von SINUS Profil Grundschule
- Dokumentation und Materialbereitstellung

Die Aufgaben der regionalen **SINUS Profil Koordination** sollen sein:

- Regionale Projektentwicklung und Qualitätssicherung
- Fortbildungen im Programm "SINUS Profil Grundschule"
- Kontakte und Kooperationen

Aus dem Vorläuferprojekt "SINUS an Grundschulen" stehen bereits vielfältige Materialien und wissenschaftlichen Beiträge zu relevanten mathematischen Themenstellungen zur Verfügung, die den SINUS Grundschulen, aber auch allen anderen zur Verfügung stehen. Es ist vorgehsehen, dass die zentrale SINUS Profil Koordination des Landesinstituts für Schulentwicklung hierfür eine spezielle Plattform auf dem Landesbildungsserver einrichten wird.

6.6 Zusammenarbeit mit Erziehungsberechtigten

Die gemeinsam angestrebte Erzieherpartnerschaft zwischen Eltern und Grundschule bedarf einer weitreichenden Transparenz über die Art und Weise, wie heute im Fach Mathematik gelehrt und gelernt wird.
Die SINUS Profilarbeit bietet sich in besonderer Weise an, relevante methodisch-didaktisch Veränderungen im Mathematikunterricht und die Zielsetzungen des Bildungsplans Grundschule zu verdeutlichen. Werden die Erziehungsberechtigten vor Ort in SINUS mitgenommen oder besser noch aktiv mit einbezogen, so befördert dies das gegenseitige Fachverständnis und stärkt die Erziehungspartnerschaft. Das Thema "Gute Aufgaben in Mathematik" bietet sich in besonderer Weise an, die inhalts- und prozessbezogene Kompetenzausrichtung des modernen Mathematikunterrichts für die Erziehungsberechtigten konkret zu veranschaulichen und mitvollziehbar zu machen.
In den Informations- und Beratungsgesprächen der Grundschule mit den Erziehungsberechtigten können so Fördermöglichkeiten thematisiert werden, die sich gut im privaten und familiären Umfeld der Kinder verorten und realisieren lassen. Hierdurch wird deutlich, was die Grundschule unter einer Potenzialförderung versteht, die sich eben nicht an den vermeintlichen Defiziten des Kindes orientiert, sondern an seinen Möglichkeiten – und keinen „Nachhilfeunterricht“ bedingt.

6.7 Kooperation Grundschule – weiterführende Schulen

In der SINUS Profilarbeit werden die heterogenen mathematischen Begabungen der Kinder in einer weitreichenden, zum Teil selbstbestimmten individuellen Differenzierung angesprochen und gefördert. SINUS ist daher auch ein lohnenswertes Thema für fachorientierte Kooperationsgespräche zwischen der Grundschule und den weiterführenden Schulen.

7 "Gute Aufgaben" – Schneller Start mit Zahlenmauern, Rechendreiecken und Zahlenketten

Die Aufgabenformate Zahlenmauern, Rechendreiecke und Zahlenketten findet sich häufig in gängigen Lehrwerken für das Fach Mathematik in allen Jahrgangsstufen. Sie ermöglichen neben einfachen Übungsformen zur Addition und zur Subtraktion auch vielfältige Aufgabenstellungen, die zum Entdecken von mathematischen Strukturen und zum mathematischen Denken anregen. Durch Variationen in der Aufgabenstellung bieten diese Aufgabenformate die Möglichkeit, sowohl inhaltsbezogene als auch prozessbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern zu fördern.

Welche Ziele kann man mit diesen Aufgabenformaten verfolgen?
Mit Zahlenmauern, Rechendreiecken und Zahlenketten lassen sowohl inhaltsbezogene als auch prozessbezogene Kompetenzen fördern:

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Zahlen und Operationen • Muster und Strukturen	• Kommunizieren • Argumentieren • Darstellen • Problemlösen

Diese Kompetenzen können gefördert werden, indem Schülerinnen und Schüler…

- … Beispiele finden und Beobachtungen / Entdeckungen aufschreiben;
- … ihr Vorgehen beschreiben, begründen und mit anderen vergleichen;
- … offene Aufgabenstellungen bearbeiten.

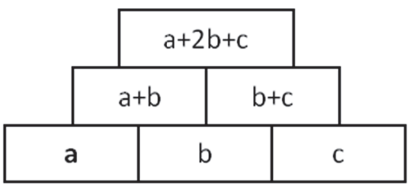
Mit diesen Fragestellungen werden die Schülerinnen und Schüler in ihren Kompetenzen gefordert:

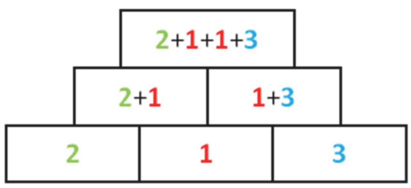
- Was kannst du beobachten?
- Welche Zahlen bleiben gleich / verändern sich?
- Welchen Unterschied kannst du erkennen?
- Kannst du deine Entdeckungen erklären?

7.1 Zahlenmauern

7.1.1 Welche mathematische Grundstruktur steckt dahinter?

Zahlenmauern sind so aufgebaut, dass in jedem Stein die Summe der Zahlen in den beiden darunter stehenden Steinen gebildet wird. Die algebraische Darstellung in der Abbildung unten links dient dabei als Hintergrund für die Lehrkraft und eignet sich nicht zum Einsatz im Unterricht in der Grundschule. Es kann hier aber mit Bildern oder Beispielen gearbeitet werden, um Strukturen zu verdeutlichen (vgl. Abbildung unten rechts).





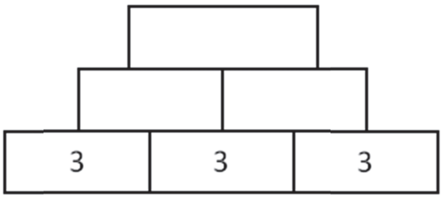
Diese Bauvorschrift ermöglicht eine Vielzahl verschiedener Aufgabenstellungen, sodass in jeder Klassenstufe der Grundschule Einsatzmöglichkeiten von Zahlenmauern bestehen. Das Format kann in weiterführenden Schulen auch in anderen Bereichen wie beispielsweise bei der Multiplikation oder zum Rechnen mit Brüchen genutzt werden.

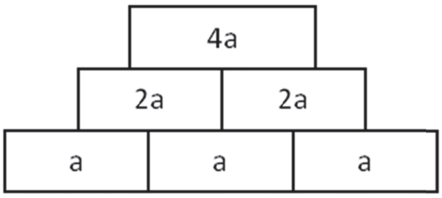
Für den obersten Stein in einer Zahlenmauer findet man Begriffe wie Deckstein, Schlussstein oder Zielstein. Die unterste Reihe kann auch Grundreihe genannt werden, die einzelnen Steine dann Grundsteine oder Basissteine, die äußeren beiden Steine werden auch als Ecksteine bezeichnet. Auch die Schülerinnen und Schüler selbst haben häufig kreative Ideen für die Benennung der Steine. Wichtig ist hierbei, sich mit der Klasse auf eine einheitliche Namensgebung zu verständigen, so dass der Austausch in kommunikativen Situationen erleichtert wird.

7.1.2 Variationen der Aufgabenstellung zum produktiven Üben

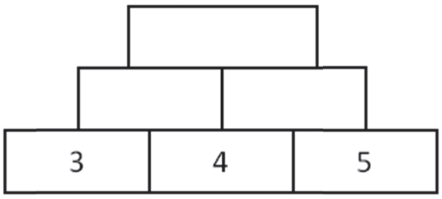
Beinahe jede Aufgabe, die wir in Mathematikbüchern finden, lässt sich durch geeignete Fragestellungen und Variationen in der Darstellung so öffnen, dass Schülerinnen und Schüler neue Erfahrungen und Entdeckungen machen können. Produktives Üben meint in diesem Sinne, den Kindern die Möglichkeit einzuräumen, eigene Aufgaben zu konstruieren, sich spielerisch mit den Problemen auseinanderzusetzen und Probleme zu lösen.

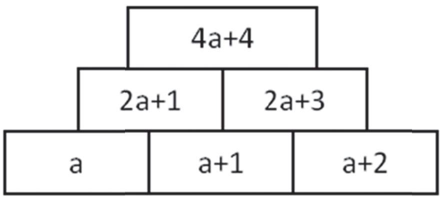
1. Erfinde eine eigene Zahlenmauer.
   Was passiert mit dem Deckstein, wenn
   … man die Zahl in einem Eckstein um 1 erhöht?
   … die Zahl im mittleren Grundstein um 1 erhöht?
2. Erfinde eine Zahlenmauer.
   Vertausche nun die Grundsteine und bilde möglichst viele verschiedene Mauern.
   Wie viele verschiedene Zahlenmauern kannst du bilden?
   Wann ist der Deckstein am kleinsten / größten?
3. Untersuche die Zahlenmauern mit immer gleichen Zahlen in den Grundsteinen.



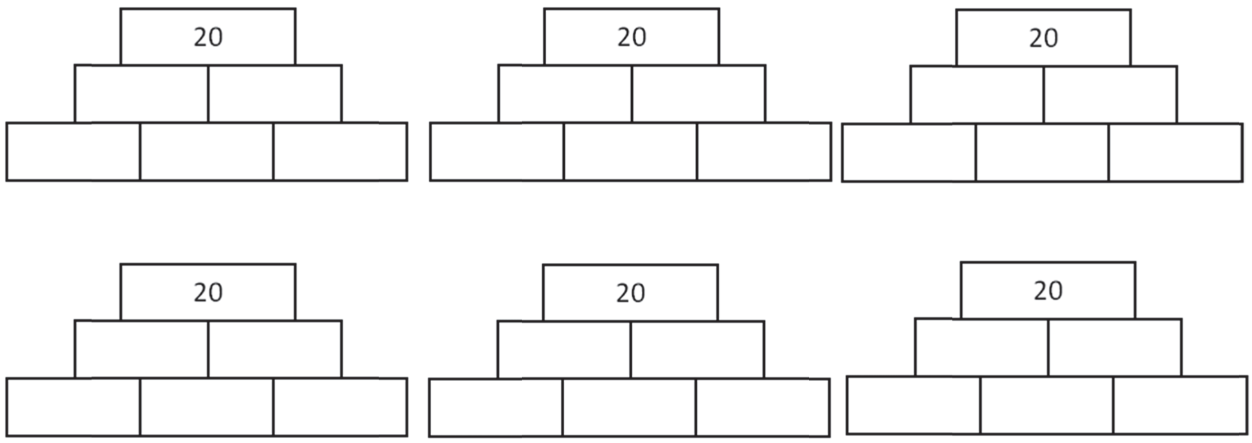


4. Erforsche Zahlenmauern mit aufeinander folgenden Zahlen in den Grundsteinen.
   Was fällt dir auf?





5. Finde möglichst viele verschiedene Zahlenmauern mit dem Deckstein 20. Du kannst die Zahlenmauer auch nach unten erweitern. Bei welcher Zahl im Deckstein geht das einfach? Wann geht es gar nicht? Wie bist du vorgegangen?
   Beispiel:



7.1.3 Zahlenmauern in der Praxis

So könnten Unterrichtsszenen mit Zahlenmauern aussehen:
Szene 1:
Vier Kinder sitzen um einen Tisch, in der Mitte liegen verschiedene Zahlenmauern, die alle den Deckstein 18 haben. Die Kinder zählen aus, wie viele verschiedene Zahlenmauern sie gefunden haben. Sie tauschen sich darüber aus, wie auf ihre Lösungen gekommen sind.
Szene 2:
Zwei Kinder stehen an der Tafel und präsentieren ein Plakat. Auf dem Plakat sind Zahlenmauern mit 5 und mehr Grundsteinen zu sehen. Die Kinder erklären, wie sie ihre Zahlenmauern "gebaut" haben und welche Überlegungen sie angestellt haben.

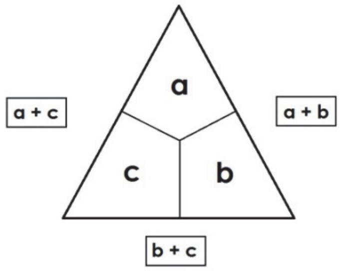
Literatur

- Krauthausen, G.: Zahlenforscher 1: Zahlenmauern. Didaktische Handreichung. Auer, Donauwörth 2006.
- Lewe, H.: Umgang mit Zahlenmauern. Strukturelle Zusammenhänge entdecken. In: Grundschulmagazin, 72 (2004) 2, S. 52-56
- TU Dortmund: PIK AS: Zahlenmauern-Übungsheft. In: www.pikas.tu-dortmund.de /upload/Material/Haus_6_Heterogene_Lerngruppen/UM/Zahlenmauern_Uebungsheft /Schueler-Material /Zahlenmauern-Uebungsheft.pdf, Zugriff am 13.11.2013

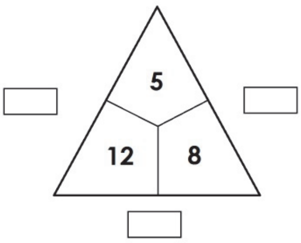
7.2 Rechendreiecke

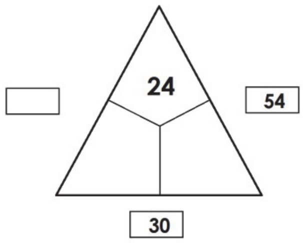
7.2.1 Welche mathematische Grundstruktur steckt dahinter?

Rechendreiecke sind so aufgebaut, dass in den drei Randzahlen die Summe der sogenannten Mittelzahlen in den beiden anliegenden Innenfeldern gebildet wird. Die algebraische Darstellung soll nochmals die allgemeine Struktur der Rechendreiecke verdeutlichen.



Diese Grundstruktur ermöglicht die bereits genannte Vielzahl verschiedener Aufgabenstellungen, die bereits ab Klasse 1 eingesetzt werden können. Durch Änderung des Zahlenraums, der Ausweitung auf negative Zahlen bzw. Brüche oder Änderung der Rechenoperation (Multiplikation anstelle von Addition) entstehen verschiedene Einsatzmöglichkeiten, die jedoch noch keine Variation in der Komplexität darstellen.

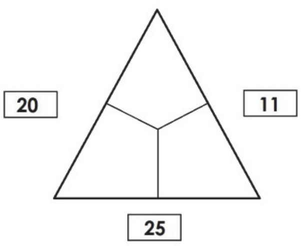


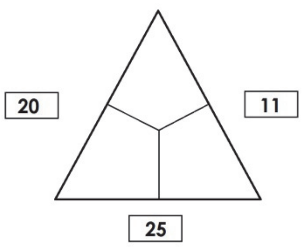


7.2.2 Variationen der Aufgabenstellung zum produktiven Üben

Eine Möglichkeit verstärkt prozessbezogene Kompetenzen in den Blick zu nehmen und zu fördern, bieten die folgenden Aufgabenstellungen:

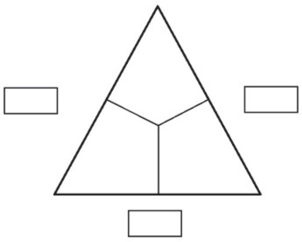
1. Finde die fehlenden Mittelzahlen. Gibt es verschiedene Möglichkeiten?

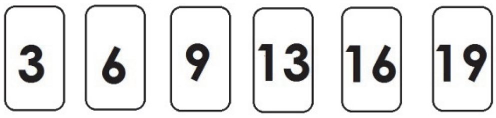




2. Erfinde eigene Rechendreiecke. Welches Rechendreieck gefällt dir am besten? Warum?

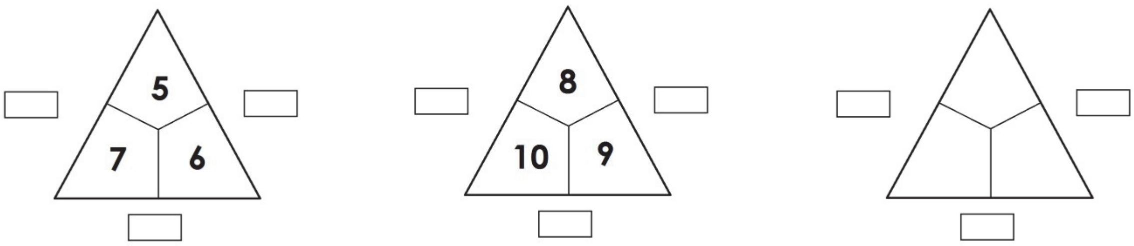
3. Hier findest du sechs Zahlen. Verwende alle Zahlen und entscheide, welche Zahlen in der Mitte und welche am Rand stehen müssen.





Eine weitere Umsetzungsmöglichkeit im Unterricht ist die gezielte Untersuchung von systematischen Variationen (vgl. PIK AS, S.11). Die Schülerinnen und Schüler untersuchen ausgehend von repräsentativen Beispielen systematische Veränderungen.

4. Was passiert mit den Randzahlen, wenn du die Mittelzahlen um 3 (5, 10) vergrößerst?



Eine weitere Herangehensweise wären Impulsfragen, die die Schülerinnen und Schüler durch eigene Beispiele beantworten sollen:

5. Wie muss man die Mittelzahlen wählen, damit die Randzahlen alle gerade (ungerade) sind?

6. Ist es möglich, dass die Randzahlen aufeinanderfolgen, z. B. 7, 8, 9?
(vgl. PIK AS, S.11)

Im Bereich der systematischen Veränderungen und der Impulsfragen entstehen durch Schülereigenproduktionen interessante Aufgabenstellungen für die Mitschülerinnen und Mitschüler, über deren Qualität kommuniziert und deren Lösbarkeit argumentiert werden kann.

7.2.3 Rechendreiecke in der Praxis

So könnten Unterrichtsszenen mit Rechendreiecken aussehen:
Szene 1:
Zwei Kinder sitzen am Tisch, in der Mitte liegen ein großes Rechendreieck und viele rote Rechenplättchen. Gemeinsam legen sie verschiedene Aufgaben und notieren diese. Sie überlegen, wie viele verschiedene Rechendreiecke sie mit der gleichen Anzahl von Plättchen finden können.
Szene 2:
Eine kleine Gruppe von Schülerinnen und Schülern steht auf dem Schulhof und zeichnet mit Kreide verschiedene Rechendreiecke auf den Boden.

Literatur

- Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein: Rechendreiecke – Ein Aufgabenformat für einen jahrgangsübergreifenden Unterricht. In: http://sinus-sh.lernnetz.de/sinusag/materialien/mathematik/unterrichtsthemen/index.php?we_objectID=311, Zugriff am 13.11.2013
- Koth, M.: STL zu Alles klar! Band 1, Veritas-Verlag, Linz. In: http://mathe-online.at/materialien/maria.koth/files/Rechendreiecke.pdf, Zugriff am 13.11.2013
- Krauthausen, G. / Scherer, P.: Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN-Materialien. In: www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf, Zugriff am 13.11.2013
- PIK AS: Haus 1: Entdecken, Beschreiben, Begründen, Üben und Entdecken. In: www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Material/Haus_1_Entdecken_Beschreiben_Begruenden/IM/Informationstexte/Ueben_und_Entdecken.pdf, Zugriff am 13.11.2013
- Scherer, P.: Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil 3. Grundschulunterricht 44 (1997). Friedrich-Verlag
- Selter, C.: Entdecken und Üben mit Rechendreiecken. Eine substantielle Übungsform für den Mathematikunterricht. In: Friedrich Jahresheft: Lernmethoden, Lehrmethoden. Wege zur Selbständigkeit. Seite 88-90
- Wittmann, E. C. / Müller G. N. (Hrsg.): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Klett, Leipzig 2000.

7.3 Zahlenketten

Das Erkennen von mathematischen Strukturen, Mustern und Zusammenhängen kann und soll bereits früh geübt werden. In diesem Zusammenhang stellen die Zahlenketten ein lohnendes Aufgabenformat dar.
Hinweis: Diese können als Vorstufe zur Auseinandersetzung mit den Fibonacci-Zahlen betrachtet werden. (vgl. Thaller 2009)

7.3.1 Welche mathematische Grundstruktur steckt dahinter?

Zahlenketten werden durch Addition der Kettenelemente gebildet. Man beginnt mit zwei beliebigen Startzahlen. Das dritte Kettenglied erhält man durch Addition der beiden vorangegangenen Elemente. Bei alle nachfolgenden Elementen verfährt man entsprechend. Die algebraische Darstellung soll nochmals die allgemeine Struktur der Zahlenketten verdeutlichen.

a	b	a + b	a + 2b

Zahlenketten mit dieser Grundstruktur und einer unbegrenzten Anzahl von Kettengliedern sind bereits in Klasse 1 einsetzbar, auch wenn die Schüler hier schnell in Zahlenräume vorstoßen, die ihre Rechenfertigkeiten übersteigen. Insgesamt bietet diese Form den Schülerinnen und Schüler Anreize mit für ihr Leistungsvermögen mit großen Zahlen zu rechen.

5	7	12			

Hochmotivierend für die Schüler sind auch leere Zahlenketten und das Austesten großer Zahlenräume.

7.3.2 Variationen der Aufgabenstellung zum produktiven Üben

Eine Möglichkeit prozessbezogene Kompetenzen verstärkt in den Blick zu nehmen und zu fördern, bieten Aufgabenstellungen mit einer vorgegeben Anzahl von Kettengliedern und einer Zielzahl.

1. Finde verschiedene Zahlenketten mit der Zielzahl 100. Ist es möglich, alle Zahlenketten mit der Zielzahl 100 zu finden? Wie viele kannst du notieren?

				100

Diese Aufgabenstellung bietet vielfältige Chancen der Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen. Die verschiedenen Lösungswege, schriftliche Darstellungen und der Austausch der Schülerinnen und Schüler miteinander darüber, lässt die Lehrkräfte vieles über die mathematischen Kompetenzen der Kinder erfahren. (vgl. Ruwisch / Peter-Koop, S. 201)

Durch die Verkürzung auf vier Kettenelemente und eine niedrigere Zielzahl ist diese Aufgabe auch in vereinfachter Form im Unterricht einsetzbar.

			20

Wie auch bei ähnlichen Aufgabenformaten bieten Impuls- oder Forscherfragen eine weitere Form der vertiefenden Auseinandersetzung und Anbahnung von prozessbezogenen Kompetenzen.

2. Wie muss ich die beiden ersten Zahlen wählen, damit die Zielzahl gerade (ungerade) wird?

			20

3. Wie ändert sich die Zielzahl, wenn man die ersten beiden Zahlen vertauscht?

5	**7**	**12**			
7	**5**	**12**			

4. Die beiden ersten Zahlen sind gleich. Was kannst du bei der Zielzahl an Besonderheiten beobachten?

5	**5**	**10**			

5. Die zweite Zahl ist ein Vielfaches der ersten Zahl. Was kannst du bei der Zielzahl an Besonderheiten beobachten?

7.3.3 Zahlenketten in der Praxis

So könnten Unterrichtsszenen mit Zahlenketten aussehen:
Szene 1:
Eine 5 m lange Zahlenkette liegt auf dem Flur, manche Kettenglieder sind leer. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern sitzt am Boden und rechnet. Gemeinsam vervollständigen sie die Zahlenkette.
Szene 2:
Zwei Schülerinnen sitzen an ihrem Tisch. Sie sind dabei, Zahlenketten zu erfinden, die alle 10 Kettenglieder haben und diese in ihre Hefte zu notieren. Wenig später sind die beiden in ein Gespräch vertieft, sie vergleichen ihre Ketten und tauschen sich darüber aus, wie sie beim Erfinden vorgegangen sind.

Literatur

- Hirt, U. / Wälti, B.: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Kallmeyer 2008
- Ruwisch, S. / Peter-Koop,A. (Hrsg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Mildenberger, Offenburg 2003.
- Scherer, P./ Selters, C.: Zahlenketten – ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 2 (1996). S. 21-28
- Thaller, B.: Fibonnaci von der Volksschule bis zur matura. In: http://math.uni-graz.at/mug/Files/Fibonacci-Volksschule-Matura.pdf, Zugriff am 13.11.2013

8 Guter Start im Anfangsunterricht

Der Mathematikunterricht in der Schuleingangsphase hat die fundamentale Aufgabe, tragfähige Vorstellungen von Zahlen- und Operationen aufzubauen. Diese bilden gemeinsam die Grundlage für einen langfristigen Kompetenzaufbau. Der Text stellt die wesentlichen Aspekte und Unterrichtsinhalte zusammenfassend dar.

Im Rahmen des Anfangsunterrichts lernen die Kinder anknüpfend an ihre Vorerfahrungen und Vorkenntnisse, mathematische Begriffe, Standardverfahren und -notationen der formalen Welt der Mathematik kennen. Ihre bereits vorhandenen informellen Rechenstrategien entwickeln die Kinder weiter, indem sie diese in unterschiedlichsten Sachkontexten anwenden, durchdenken, bewerten, bei Bedarf verwerfen oder erweitern. Ausgangspunkt sind stets die individuellen Präkonzepte und Kompetenzen des einzelnen Kindes (siehe 8.1 Orientierung an Vorkenntnissen).
Durch Begegnungen mit Problemstellungen in der realen Erfahrungswelt entsteht ein tragfähiges Verständnis abstrakter Begriffe, wie z. B. dem Zahlverständnis (siehe 8.2 Zahlverständnis).
Wichtiges Instrumentarium stellt dabei auch der adäquate Umgang mit den einzelnen Zahlbegriffsaspekten dar. In verschiedenen Anwendungssituationen nutzen die Kinder die Bedeutung und Merkmale der Aspekte zur Erfassung komplexer Sachverhalte. Nur so kann sich das Abstrakte einer Zahl herauskristallisieren (siehe 8.4 Zahlbegriffsaspekte).
Um Kinder von Anfang an zu einer Vertrautheit im Umgang mit Zahlen zu führen, ist es notwendig, im Unterricht nicht nur die Ergebnisse zu betrachten, sondern vor allem die Rechenwege der Kinder in den Mittelpunkt zu stellen, die sie zu diesem Ergebnis geführt haben (siehe 8.6 Operationsverständnis zu Addition und Subtraktion).
Eine besondere Herausforderung stellt dabei der Umgang mit der besonderen Zahl Null da, die in unterschiedlichsten Zusammenhängen im Alltag Verwendung findet (siehe 8.7 Die Null).

8.1 Orientierung an den Vorkenntnissen der Kinder

Jedes Kind macht schon lange vor dem Schulbeginn Erfahrungen mit Mathematik. Es entwickelt dabei erstaunliche Kreativität und vielfältige Varianten, um mit Zahlen, Mengen, Längen, Größen und Relationen umzugehen.
So verlangt das Aufräumen des eigenen Kinderzimmers u. a. Klassifikationsleistungen, z. B. ob alle Bücher im Regal, alle Bausteine in der Kiste sind usw.
Beim Tischdecken ist es wichtig, nicht nur genauso viele Teller, Gläser und Besteck hinzustellen wie Personen da sind, sondern diese auch gleichmäßig auf diese Personen zu verteilen.
Auch erste Verteilungsstrategien, z. B. beim Verteilen einer Tüte Bonbons, erwerben die Kinder schon lange vor der Einschulung.
Nahezu alle Karten-, Brett- und Würfelspiele enthalten mathematische Strukturen. Es wird das simultane Erfassen oder auch das Abzählen ebenso gefordert wie das Klassifizieren oder das Reihenbilden. Die Einsicht in die Notwendigkeit von Regeln wird ebenso gefördert, denn nur wenn alle Spieler die Regeln akzeptieren, wird das Spielen des Spiels möglich.

Zahlen in Form von Zahlwörtern und Ziffern begegnen den Kindern im Alltag auf vielfältige Art und Weise: Haus- und Telefonnummern, Alters-, Preis-, Mengen- und Längenangaben sind in nahezu allen Lebenssituationen zu finden.
Die Kinder erlernen sehr früh die Zahlwortreihe. Ähnlich wie ein Gedicht oder einen Reim lernen sie diese auswendig. Sie benutzen Zahlwörter besonders gern, weil sie im Wortschatz der Erwachsenen häufig vorkommen und Kinder diese wie die Erwachsenen sprechen. Sie wenden die Zahlworte jedoch ohne Mengen- oder Größenverständnis an. Später können die Kinder mit Hilfe der Zahlwortreihe Mengen zählen, indem sie mit dem Finger jeweils ein Teil antippen. Das Rückwärts- und in Schritten Zählen bildet sich danach heraus. Im Grundschulalter erkennen die Kinder dann, dass Zahlen auch den Abstand zwischen zwei Zahlen beschreiben können. D. h. sie erkennen, dass der Abstand zwischen 3 und 6 genau so groß ist, wie der Abstand zwischen 7 und 10.
Kindern begegnet Mathematik tagtäglich und sie haben Freude daran, sich mit mathematischen Fragen auseinanderzusetzen. Gelingt es uns, diese Neugier, die mathematischen Entdeckungen der Kinder zu unterstützen und zu fördern, geben wir ihnen bestmögliche Voraussetzungen für das schulische Mathematik-Lernen. Die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen zu fördern bedeutet, den Kindern Gelegenheit zu geben, sich in ihrer Umgebung mit Mengen, Längen und Zahlen auseinanderzusetzen und Mathematik im alltäglichen Handlungsablauf zu erkennen.
Diese vielfältigen individuellen Vorerfahrungen sind eine wichtige Basis für das Erlernen der formalen Mathematik, d. h. der Abstraktion der symbolischen Darstellung von diesen Alltagserfahrungen. Für den schulischen Lernerfolg haben sich folgende mathematischen Bereiche als bedeutsam erwiesen:

- Klassifikationsleistungen, d. h. Gegenstände nach bestimmten Kategorien ordnen (groß – klein, dick – dünn, rund – eckig);
- Serienbildung, d. h. Muster und Strukturen, Symmetrien sowie Rang- bzw. Reihenfolgen bilden;
- Zahlwissen und Zählfertigkeiten;
- Einschätzung von Größenrelationen;
- Wahrnehmungskonstanz, Invarianz (5 Murmeln sind immer 5 Murmeln, auch wenn sie anders angeordnet sind);
- Zerlegbarkeit von Mengen / Zahlen (Teil-Ganzes-Beziehung);
- räumliche Vorstellungsleistungen: Raum-Lage-Beziehungen, Rechts-Links-Orientierung.

Dazu sind folgende Punkte anzumerken:

Klassifizieren und Sortieren (Mengen nach bestimmten Kategorien ordnen)

Kinder ordnen alltägliche Materialien wie Spielzeug, Steine, Schrauben oder Naturmaterialien in selbst gewählte Kategorien ein. Sie sollen dabei ihre Kriterien selbst erklären können. Wenn die Kinder beim Tischdecken, Wäsche Zusammenlegen und Sortieren oder beim Besteck Einräumen helfen, sollen sie den Eltern die gewählten Ordnungskriterien nennen können. Spiele wie „Halli-Galli“ oder „Ligretto“ fördern besonders solche Klassifikationsfähigkeiten.

Muster, Symmetrie und Reihenfolgen

Unser Alltag besteht ebenso aus Regelmäßigkeiten und Mustern: Wochentage, Tages- und Jahreszeiten. Das Entdecken von diesen und anderen Mustern ist hilfreich, um Zusammenhänge und Regelmäßigkeiten in der Mathematik erfassen zu können. Auch die Entdeckung von Zählrhythmen wie 2-4-6-8-10 oder das Zählen in 5er Schritten 5-10-15-20-25-30 gehört dazu. Die Kinder entdecken Muster auf Handtüchern, Tischdecken, Fußbelägen …, setzen diese fort oder entwerfen selbst Muster. Kinder können Reihenfolgen aufstellen, z. B. Familienmitglieder nach dem Alter oder der Körpergröße ordnen.

Zahlwissen, Zählfertigkeit und Mengenwissen

Kinder begegnen in ihrer Umgebung Ziffern. Sie zählen auch gerne Gegenstände ab. Die Kinder sollen Ziffernsymbole in der Umwelt suchen: Wo überall stehen Zahlen? Wo gibt es große bzw. kleine Zahlen? Was bedeuten die Zahlen auf der Uhr, dem Kalender, der Haustür oder dem Telefon?
Die Kinder dürfen zum Umgang mit Zahlen herausgefordert werden. Abzählreime, Zählen in Zweierschritten, „Himmel & Hölle" oder Zahlendominos unterstützen den vielseitigen Gebrauch von Zahlworten und Ziffernsymbolen.
Gespräche sollen zum Nachdenken über mathematische Phänomene im Alltag anregen. (z. B. Gibt es in deinem Zimmer mehr Bücher oder mehr Autos? Wie alt bist du, wenn du doppelt so alt bist als jetzt?)

Messen und Wiegen (Umgang mit Größen / Größenrelationen)

Kinder sammeln grundlegende Kenntnisse über die Bedeutung von Maßangaben. Sie entwickeln erste Vorstellungen von gebräuchlichen Maßen wie 1 Liter (Tetrapack Milch), 1 m (so groß bin ich) und 1 kg (Päckchen Zucker).
Gerade der Bereich der Nahrungszubereitung unterstützt die Entwicklung realer Vorstellungen von Gewichts- und Volumeneinheiten, wie Liter, Gramm oder Kilogramm. Die Kinder sollen beim Rühren, Wiegen, Abmessen, Umschütten helfen, Zahlen in Rezepten finden usw..

Invarianz

Die Invarianz einer Menge bedeutet, dass die Anzahl der Objekte, die zu dieser Menge gehören, nicht von der räumlichen Verteilung oder Anordnung der Objekte abhängt. (z. B. Spielekiste, Schuhschrank, Familienfoto, usw.)

Räumliches Vorstellungsvermögen und Raum-Lage-Beziehungen

Der Umgang mit verschiedenen geometrischen Formen und Körpern wie Spielzeugen, Bausteinen, Verpackungen und das Verstehen von Begrifflichkeiten wie „oben, unten, neben, in, auf" unterstützen die Raumorientierung. Türme bauen, sich auf Klettergerüsten bewegen, in Kartons kriechen, sich vorwärts oder rückwärts bewegen, rechts und links unterscheiden – all diese Aktivitäten fördern diese Kompetenzen.

8.1.1 Was bedeuten diese Erkenntnisse?

In der Anfangsphase des ersten Schuljahres wird die pädagogische Arbeit der vorschulischen Einrichtungen fortgesetzt. Das Lernen im vorschulischen Bereich war vorrangig von Alltagshandlungen und konkret erlebten individuellen Erfahrungen geprägt. Das Lernen nach Schuleintritt findet in einem mehr festgelegten, ritualisierten und institutionalisierten Rahmen statt. Der Unterricht zu Beginn des ersten Schuljahres hat die Aufgabe, an die vorschulischen Lernerfahrungen, die gekennzeichnet waren durch manuelles Tun, spontanes Experimentieren und freies Spielen, anzuknüpfen. Deshalb sind für den Mathematikunterricht in dieser Zeit pädagogische Ziele bedeutsam, die durch Differenzierungs- und Förderangebote die Kinder schulbereit und lernfreudig machen.
Eine der wichtigsten Aufgaben in der Anfangsphase ist es festzustellen, wie weit das mathematische Verständnis der Kinder bereits entwickelt ist bzw. welche Fähigkeiten noch nicht entwickelt sind, um ggf. förderdiagnostische Maßnahmen zum Ausgleich der Defizite zu ergreifen. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, muss die Lehrperson ein differenziertes Bild über die Vorkenntnisse jedes Schulanfängers haben.
Viele Lehrerinnen und Lehrer unterschätzen das arithmetische Vorwissen der Kinder mit der Folge, dass die Kinder nicht „da“ abgeholt werden „wo sie sich befinden“, statt dessen wird im Gleichschritt beim Stand Null mit allen Anfängern ein kleinschrittiger Mathematiklehrgang begonnen. Ein einheitlicher Unterricht für alle kann aber dem breiten Spektrum an Vorkenntnissen nicht gerecht werden. Schließlich gibt es auf der einen Seite Kinder, die einen umfangreichen „Vorkurs“ benötigen und auf der anderen Seite Schulanfänger, die bereits im Zahlenraum bis 100 zählen und rechnen können.
Das bedeutet aber auch, dass die Anfangsphase im Mathematikunterricht offen und differenziert gestaltet werden muss, damit jedes Kind individuelle Fortschritte machen kann. Die Kinder können so motiviert und interessiert ihr mathematisches Wissen optimal weiter entwickeln.

8.2 Zahlverständnis entwickeln

Ein Verständnis des Begriffes „Zahl“ kann sich nur bilden, wenn mit den verschiedenen Aspekten des Begriffes in vielfältigen Anwendungssituationen gearbeitet wird. Vermittlung von Begriffsverständnis und der Umgang mit dem Begriff sind im Unterricht nicht voneinander zu trennen. Für den arithmetischen Anfangsunterricht bedeutet das einen frühzeitigen und integrierten Umgang mit Zahlen. Das Kind kann ein Stück der Zahlwörterfolge aufsagen, es kennt Hausnummern, Telefonnummern, Ziffern und Zahlenbilder auf Spielkarten und Würfeln und es kann auf dem Spielfeld um eine bestimmte Anzahl Felder vorrücken. Dies alles sind Aspekte des Zahlbegriffs.

8.2.1 Das Lernen der Zahlwortreihe

Das Wort „zählen“ kann unterschiedlich verwendet werden. Man kann Dinge zählen (abzählen) oder auch bloß zählen, also ein Stück der Zahlwortreihe aufsagen. Letzteres ist eine Voraussetzung für ersteres. Kinder wollen beides lernen. Vielen Kindern fällt es leichter, wenn sie auf Dinge zeigen können oder mit dem Finger auf den Tisch klopfen. Das Aufsagen der Zahlwortreihe ist eine sprachliche Leistung, etwa wie das Aufsagen des Alphabets. Die Zahlwörter bis zwölf und deren Reihenfolge muss das Kind auswendig lernen, zu verstehen gibt es dabei nichts. In jeder

Sprache muss das System der Zahlwortbildung strukturiert und regelhaft sein. In der deutschen Sprache gibt es für die Zahlen 13 bis 99 etwa diese Regel: Sage zuerst die Einer, dann etwas über die Zehner, also fünf-zehn oder drei-undzwanzig. Da wir die Buchstaben von Wörtern von links nach rechts schreiben und die Ziffern auch, haben wir in der deutschen Sprache beim Schreiben zweistelliger Zahlen ein Problem: Sprech- und Schreibweise sind entgegengesetzt. Ab Hundert verwenden wir eine klar strukturierte Sprechweise, beispielsweise sieben-tausend-zwei-hundert.
Wenn ein Kind die Zahlwortreihe richtig aufsagen kann, heißt das noch nicht, dass es entsprechende Mengen von Dingen richtig abzählen kann oder Verbindungen zwischen Zahlwörtern und Mengen herstellen kann.

8.2.2 Anzahlen

Anzahlen zu verstehen ist eine unabdingbare Leistung, die alle Grundschulkinder erbringen müssen. Auch dabei sind unterschiedlichste Schwierigkeiten zu überwinden. Das Anzahlverständnis muss dabei in jedem Fall mit der Zahlwortreihe verbunden werden.

Ein großes Problem des Anzahlbegriffs besteht darin, dass beim Zählen von Mengen die Zahlwörter in doppelter Bedeutung verwendet werden. Beim Abzählen ordnen wir jedem Ding genau ein Zahlwort zu.

○	○	○	○	○	○	○
eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben

Durch diese Zuordnung bringen wir Dinge in eine Reihenfolge. Das siebte Element bekommt sozusagen den Namen „Sieben“.
Wenn die sieben Früchte auf dem Teller als eine abzuzählende Menge, also als ein Ganzes, aufgefasst werden, so bekommt das beim Zählprozess zuletzt genannte Wort einen weiteren Sinn. Es soll zugleich die Anzahl der gesamt abgezählten Objekte bezeichnen. Die sieben einzelnen Früchte werden gedanklich zu einer Menge zusammengefasst.

○	○	○	○	○	○	○
eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben

Damit das Kind die Zahl 7 als Anzahl erfassen kann, muss es zwei Leistungen erbringen: Erstens die Herstellung einer Einszueins-Zuordnung und zweitens eine Klassifikationsleistung, das gedankliche Zusammenfassen der gezählten Dinge zu einer Menge und das Zuordnen eines Zahlwortes.
Der Übergang von einzelnen gezählten Dingen zur Gesamtmenge kann mit Hilfe der so genannten Simultanerfassung erleichtert werden. Dies ist eine Anzahlerfassung ohne zählen. Menschen können bis vier Elemente ohne zählen simultan erfassen. Ab fünf steigt der Zeitbedarf für das Erkennen der Anzahl bei ungeordneten Mengen stark an, weil dann gezählt werden muss oder in simultan erfassbare Teilmengen zerlegt und gerechnet oder aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden muss (quasisimultane Anzahlerfassung).

Mit etwas Übung können wir auch noch fünf mit einem Blitz-Blick innerhalb einer Sekunde erkennen, wenn wir die Mitte fixieren und links und rechts davon je zwei sehen. Das wird wesentlich erleichtert wenn wir den Mittelstrich verlängern.

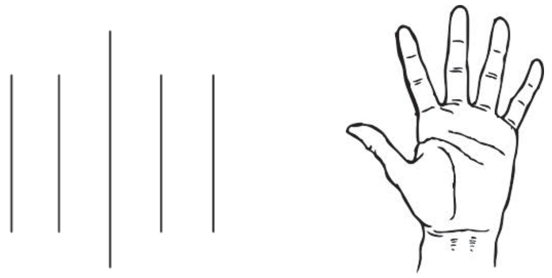


Abbildung 3: Blitz-Blick, Handstuktur

Dies ist auch zugleich die Struktur der Hand. Der längste Finger, der Mittelfinger, ist in der Mitte und rechts und links davon je zwei Finger. Die fünf erfassen wir quasi-simultan als eins mehr als vier, die sechs als drei und drei. Das wird auch bei den Zahlbildern des Würfels benutzt.
Den Blitz-Blick können wir mit den Kindern im Unterricht üben. Man legt dazu Plättchen auf den Overhead-Projektor und schaltet diesen nur für wenige Sekunden ein, die Kinder nennen dann die Anzahl der Plättchen. Für freiere Arbeitsphasen kann man Kärtchen hergestellen mit denen die Kinder den Blick zu zweit trainieren können.
Das sichere blitzartige Erkennen von Anzahlen bis vier scheint eine wichtige Voraussetzung für erfolgreiche Teilnahme am Mathematikunterricht zu sein. Zahlreiche Arbeitsmittel werden erst praktikabel und effektiv, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist.

8.2.3 Das Zehnerfeld

Die Zahldarstellung auf dem Zehnerfeld geht wahrscheinlich auf Wirtz (1978) zurück und wurde von vielen anderen übernommen.
Man braucht nur noch mit den Kindern vereinbaren, dass auf dem Feld zuerst die obere Reihe von links nach rechts aufgefüllt wird (so wie beim Buch lesen).

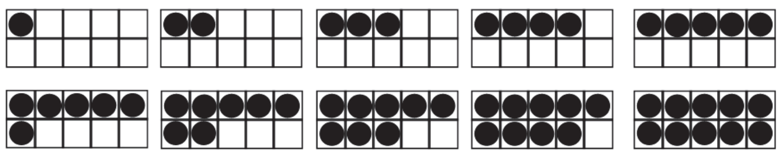


Abbildung 4: Zehnerfeld

Das Zehnerfeld kann aufgefasst werden als eine Abstraktion von der in Deutschland üblichen Zehner-Eierschachtel, ist aber für viele Zwecke handlicher als diese.

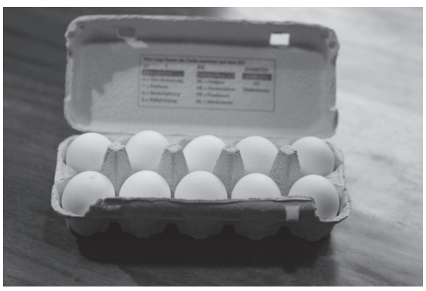


Abbildung 5: Eierschachtel

Auf dem Zehnerfeld sind die Zahlen von 1 bis 10 dargestellt. Der große Vorteil dieser visuellen Darstellung der Punktemenge liegt darin, dass man die Anzahl der Punkte mit einem Blick erkennt, ohne zu zählen. Bis zu vier Punkten sind leicht auf einen Blick zu erkennen. Die fünf erkennt man daran, dass eine Reihe des Feldes voll ist. Die Sechs erkennt man als 5+1, die Zehn als zwei Fünfen, beziehungsweise als volles Zehnerfeld.
Das Zehnerfeld erweist sich bei der Erarbeitung von Zahlvorstellungen als sehr wichtiges Arbeitsmittel. Aber auch außerhalb des Zahlenraumes bis 10 ist der Nutzen groß. Es ist der strukturierte Rahmen für die Darstellung von Anzahlen durch Mengen von Zählplättchen. Die Festlegung, die Plättchen in fester Ordnung zu legen, also zuerst die obere Reihe zu füllen, von links nach rechts, und danach erst die zweite Reihe, stellt ein Bindeglied zwischen der Zählreihe und der gegliederten Anzahlerfassung dar.

8.3 Rechenstrategien im Zahlenraum bis 20

8.3.1 Zählstrategien

Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 lassen sich grundsätzlich zählend bewältigen. Zählmethoden entsprechen der natürlichen Entwicklung der Kinder, sollten aber nach und nach durch andere Strategien abgelöst werden.

Alles-Zählen
Diese Methode wird wohl von allen Kindern spontan angewandt. Dabei werden im ersten Schritt die beiden Summanden, mit Hilfe von Plättchen, getrennt voneinander gezählt. Im zweiten Schritt werden dann alle Plättchen von vorn durchgezählt.

Weiterzählen
Dabei wird die erste Menge von Objekten nur einmal gezählt, der zweite Summand gibt dann an, wie viele Schritte weiter gezählt werden muss.
Bsp. 3 + 5 (3); 4, 5, 6, 7, 8 , also 8

Hierbei ist doppeltes Zählen erforderlich: Eins dazu sind 4, zwei dazu sind 5, …, fünf dazu sind 8. Die Kinder unterstützen ihre Zählschritte häufig mit den Fingern. An den nacheinander ausgestreckten Fingern lesen sie ab, wie viele Schritte sie schon weitergezählt haben. Offensichtlich erfordert die Zählprozedur bei mehr als vier Schritten, die noch simultan überblickt werden können, große Aufmerksamkeit und Sorgfalt. Häufig ist dabei das Verrechnen um +1 oder -1, weil die Rolle des Anfangs- oder Endgliedes der Zählprozedur unklar ist.

Zählmethoden haben nicht nur den Nachteil der Fehleranfälligkeit. Ein Hauptproblem liegt darin, dass das Verständnis für Rechenoperationen oberflächlich bleibt, wenn Zahlsymbole und Operationszeichen lediglich als Anleitung für Zählhandlungen verstanden werden. Einsichten in operative Zusammenhänge bleiben weitgehend aus, wenn Zahlen nicht als strukturierte Ganzheiten aufgefasst und miteinander in Beziehung gesetzt werden.

8.3.2 Nichtzählende Strategien

Zu den nichtzählenden Rechenstrategien, die flexible Lösungswege fordern und fördern, gehören insbesondere:

Grundaufgaben:

- Addieren / Subtrahieren der Null, Eins und Zwei
- Verdoppeln und Halbieren
- Zehnersummen
- „Kraft der Zehn“, mit Zehnerportionen rechnen
- „Kraft der Fünf“, mit Fünferportionen rechnen

Ableitungsstrategien:

- Tauschaufgaben
- Nachbaraufgaben, z. B. das „Verdoppeln plus 1“
- Gleichsinniges Verändern
- Gegensinniges Verändern

Einige dieser Strategien werden im Folgenden erläutert:

Verdoppeln und Halbieren

Aufgaben des Verdoppelns und Halbierens gehören häufig zu den ersten Aufgabentypen, welche Kinder auswendig wissen. Dies liegt an ganz elementaren Erfahrungen. Wenn man immer zwei Äpfel in einen Korb legt (in jeder Hand einen), kann man immer mit geraden Zahlen zählen oder die Anzahl der Handlungen verdoppeln. Auch beim Spiegel verdoppelt sich die Anzahl der Elemente.
Stellt man die Anzahlen auf dem Zehner- oder Zwanzigerfeld dar, ergeben sich einprägsame Bilder.
Die Ähnlichkeit der Verdopplungsaufgaben zu 1 und 6, 2 und 7, 3 und 8 sowie 4 und 9 zeigen den Vorteil der „Kraft der Fünf“.

Zehnersummen

Besonders wichtig für vorteilhaftes Rechnen ist das Ergänzen zum vollen Zehner. Am Zehnerfeld lassen sich die noch freien Felder unmittelbar erkennen.
Die Fünferbündelung ist auch dabei eine entscheidende Hilfe. Ein besonders geeignetes Gerät zum Training der Zahlzerlegung ist die Schüttelschachtel.
Hier füllt man z. B. 10 Perlen in die Box, die durch einen Steg teilweise in zwei Fächer abgetrennt ist. Ein Fach ist auf der Vorderseite undurchsichtig. Nach kräftigem Schütteln befinden sich beispielsweise 7 Perlen auf der sichtbaren Seite, die bis zur 10 fehlenden Kugeln sind auf der ande-

ren Seite verborgen. Das Kind nennt nun die Aufgabe: 7 + 3 = 10. Das Kind kann selbst kontrollieren, ob es richtig ergänzt hat.

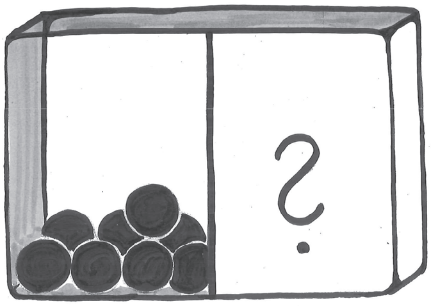


Abbildung 6: Schüttelbox

"Kraft der Zehn" – Zehn als Summand bzw. Subtrahend

Bei „rechenschwachen“ Kindern mit Schwierigkeiten im Rechnen fällt oft auf, dass sie Rechenaufgaben der Art 10 + 6, 8 + 10 oder 16 – 10 zählend rechnen. Sie interpretieren dabei Zahlen wie 14 nicht als „vier und zehn“, also aus der Zusammensetzung von 4 und 10, sondern als ein ganzes, ein bestimmtes Wort in der Folge der Zahlwörter. Für diese Kinder ist es wichtig, Verbindungen zwischen der Schreibweise, dem bekannten Zahlwort und dem im Unterricht verwendeten Material herzustellen.

Nach der Vorarbeit zum Verständnis zweistelliger Zahlen wird das Addieren / Subtrahieren der Zahl 10 einfacher. Diese Operationen bedeuten auf der konkreten Ebene das Dazulegen oder Wegnehmen eines Zehners.

"Kraft der Fünf"

Das sehr effektive Zusammenfassen von Fünfen reduziert das Rechnen mit den Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 auf das besser vertraute Rechnen mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4. Bei 6 + 8 muss man im Wesentlichen nur 1 + 3 rechnen (und die Doppel-Fünf, also die Zehn addieren). Es soll allerdings auch hier betont werden, dass diese Strategie anhand visueller Vorstellungen z. B. mit dem Zehnerfeld eingeführt werden muss. Auf rein symbolischer Ebene ist es für die Kinder anfangs schwierig, in der symbolischen Schreibweise „6 + 8“ die beiden Fünfen zu erkennen. Eine Hilfe auf symbolischer Ebene wäre die Notation der Zerlegungen in dieser Form.

$$\begin{array}{cccc} & 6 & + & 8 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \end{array}$$

Tauschaufgaben

Auf der Ebene mit konkretem Material und bildlicher Darstellung ist das Vertauschungsgesetz a + b = b + a beim Teile-Ganzes-Konzept unmittelbar klar.
Für das Kind mit Rechenschwierigkeiten kommt es darauf an, enge Verbindungen zwischen konkreten und bildlichen Vorstellungen und den zugehörigen symbolischen Schreibweisen herzustellen. Wenn das Kind die Plättchen im Zehnerfeld sieht, kann es mit einem Stift zeigen, wie die Menge in die beiden Teile zerlegt werden kann, nämlich einmal durch eine waagerechte Linie und einmal durch eine senkrechte. Das Kind kann entscheiden, welches die einfachere Aufgabe ist und diese ausrechnen.

Verdoppeln plus 1

Bei Kindern mit Schwierigkeiten im Rechnen kann man oft beobachten, dass sie Aufgaben wie 6 + 7 durch Weiterzählen von der sechs um sieben Schritte lösen. Häufigste Ursache dafür ist wohl, dass diese Kinder Rechenterme lediglich als Anweisungen für Zählhandlungen verstehen. Liegen sechs Plättchen unstrukturiert nebeneinander und werden sieben Plättchen ebenfalls unstrukturiert hinzugefügt, dann scheint für die Kinder das zählende Rechnen der einzige nahe liegende Lösungsweg.
Anders, wenn man bei der Darstellung wieder auf das Zehnerfeld zurückgreift. Zum einen kann dem Kind die Fünfergliederung helfen, zum anderen können sie den Zusammenhang zwischen den Termen 6 + 6 und 6 + 7 erkennen.

Verdoppeln plus 2

Auch diese Strategie muss durch konkretes Handeln mit Quantitäten eingeführt werden. Dazu präsentiert man die Aufgabe in symbolischer Schreibweise und die Kinder bearbeiten sie durch Legen von Plättchen auf einem Zehner- bzw. Zwanzigerfeld.
Die Kinder erkennen hier zwei unterschiedliche Möglichkeiten. Zum einen verdoppeln sie die kleinere Zahl und rechnen dann plus zwei, zum anderen versuchen sie den Überschuss, also die zwei Plättchen die übrig erscheinen, gerecht zu verteilen. Sie schieben also ein Plättchen zur kleineren Zahl und erhalten so eine andere Verdopplungsaufgabe.

8.4 Zahlbegriffsaspekte

Der Terminus "Zahlbegriff" fasst ein ganzes Bündel unterschiedlicher Komponenten zusammen, die jeweils als eigene Aspekte definiert werden. Sowohl im Alltag als auch in der formalen Welt der Mathematik werden Zahlen in vielgestaltiger Weise verwendet, so dass Kinder zur Lösung mathematischer Probleme in ihrer Lebenswelt ein umfassendes, komplexes Verständnis der verschiedenen Zahlbegriffsaspekte benötigen.

Folgende Tabelle liefert einen kurzen Überblick zu einigen Aspekten:

Aspekt	Beschreibung	Beispiele
Ordinalzahl	*Zählzahl:* wird dazu verwendet, um Zählprozeduren zu durchlaufen. *Ordnungszahl:* gibt den Rangplatz eines Elements in einer geordneten Reihe an.	eins, zwei, drei, … zehn, neun, acht, sieben, … Sabine steht als zweite in der Schlange beim Bäcker.
Kardinalzahl	beschreibt die Mächtigkeit von Mengen, d. h. die Anzahl der Elemente einer Menge.	25 Kinder 7 Wochentage
Relationalzahl	beschreibt die Beziehung zwischen zwei Mengen.	Mia hat 2 Kekse, Hanna hat 5. Das sind 3 Kekse mehr.
Maßzahl	bestimmt anhand einer Maßeinheit eine gemessene Größe.	10 Schritte 3 Stunden 2 kg
Operator	bezeichnet die Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs.	dreimal 2 Flaschen holen fünfmal niesen
Rechenzahl	ermöglicht Rechenoperationen durchzuführen.	Rechnen mit Ziffern
Codierung	wird dazu benutzt, um Objekte näher zu bezeichnen.	74074 Heilbronn Tel. 07131/ 12345 ISBN
Skalenwert	bezeichnet einen Punkt auf einer Skala.	Thermometer Lineal
Systemzahl	liefert eine systematische Schreibweise	743 = 7 • 10 • 10 + 4 • 10 + 3
Märchenzahl	transportiert in außermathematischen Kontexten Bedeutungen.	8 als Zahl der Unendlichkeit

Tabelle 4: Zahlbegriffsaspekte

8.4.1 Entwicklung des Zahlbegriffsverständnisses

Schon lange vor Schuleintritt entwickeln Kinder erste Vorstellungen zu verschiedenen Zahlaspekten, wobei diese vermutlich zunächst stark kontextgebunden sind. Im mathematischen Anfangsunterricht erhalten die Kinder daran anknüpfend vielfältige Lerngelegenheiten, in denen sie mit den verschiedenen Aspekten in lebensnahen Anwendungssituationen handeln und ihre Erkenntnisse reflektieren. Um der Komplexität des Zahlbegriffsverständnisses Rechnung zu tragen, sollte die Vielseitigkeit der Aspekte herausgestellt werden. Eine Überbetonung einzelner Aspekte würde zu einem einseitigen Zahlbegriffsverständnis führen, das dem Kind wichtige Lösungswege arithmetischer Probleme verschließt. Ein vielschichtiges und zugleich umfassendes Begriffsverständnis wird den Kindern anhand von spielerischen Zählübungen, numerischen Rollenspielen und Bildergeschichten ermöglicht. Zahlzerlegungen und das Erforschen der Eigenschaften der Zahlen bieten ebenfalls wichtige Erkenntnisse.

Kinder erfassen die einzelnen Zahlaspekte zunächst kontextbezogen im jeweiligen Anwendungsbereich ehe sie dann im weiteren Verlauf die Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Zahlbegriffsaspekten begreifen. Während es für die Lehrkraft sehr wichtig ist, die verschiedenen Aspekte zu kennen, werden diese im Unterricht nicht begrifflich thematisiert, sondern ausschließlich in ihren verschiedenen Anwendungsbezügen betrachtet, erprobt und diskutiert.

Auch wenn sich bei den meisten Kindern ähnliche Entwicklungsschritte beobachten lassen, so verläuft der Prozess der Zahlbegriffsentwicklung individuell unterschiedlich. Bezeichnend ist auch, dass er nicht linear, sondern eher wellenförmig verläuft. Ähnlich wie beim Schrift-Spracherwerb beschränkt sich der Entwicklungsprozess zunächst auf einen sehr kleinen Zahlenraum, ehe dann die Entwicklungsfortschritte auch auf einen größeren Zahlenraum übertragen werden können. Bei diesem Transfer sind strukturelle Einsichten und Strategien zunächst instabil und fehleranfällig, da neu entwickelte, überlegene Strategien und Fähigkeiten erst sukzessive die bisherigen ablösen. Eine Zeitlang bleiben die neu erworbenen Erkenntnisse stark kontextgebunden parallel zu den bisherigen bestehen. Erst im Laufe der Schulzeit erfolgt dann die vollständige Integration aller Teilaspekte, wobei sich in allen Phasen die einzelnen Entwicklungsstränge gegenseitig bedingen und unterstützen.

Aktuell geht man davon aus, dass sich auf dem Weg zur numerischen Kompetenz der kardinale und ordinale Zahlaspekt zunächst getrennt voneinander entwickeln (vgl. K. Krajewski). Erst mit der Verfügbarkeit der genauen Zahlwortfolge gelingt es dem Kind, Mengen Zahlwörter zuzuordnen. Parallel dazu entwickelt sich das Verständnis für Beziehungen und Veränderungen von Mengen auch ohne Zahlbezug. Eine sehr wichtige und für weitere Entwicklungsschritte unabdingbar notwendige Erkenntnis liegt in der Einsicht, dass Mengen in kleinere Mengen zerlegt und aus diesen auch wieder zusammengesetzt werden können (Teile-Ganzes-Konzept).
Hierzu gehört auch die Erkenntnis, dass sich Mengen nur dann verändern, wenn etwas hinzugefügt oder entfernt wird.

In einem weiteren Entwicklungsschritt erreicht das Kind dann zusätzlich die Fähigkeit, Mengenrelationen auch quantitativ zu beschreiben. Zahlwörter werden nun zum Beschreiben der Mächtigkeit einer Menge (Kardinalzahlaspekt) und auch zum Repräsentieren der Relationen zwischen Mengen (Relationalzahlaspekt) verwendet.

Fundamentale Grundlage für eine gelingende Zahlbegriffsentwicklung ist das sichere und flexible Operieren mit konkreten Gegenständen auf unterschiedlichen Darstellungsebenen. Deshalb ist es sehr wichtig, verschiedene Anschauungsebenen zu nutzen und immer wieder zwischen diesen hin und her zu wechseln.

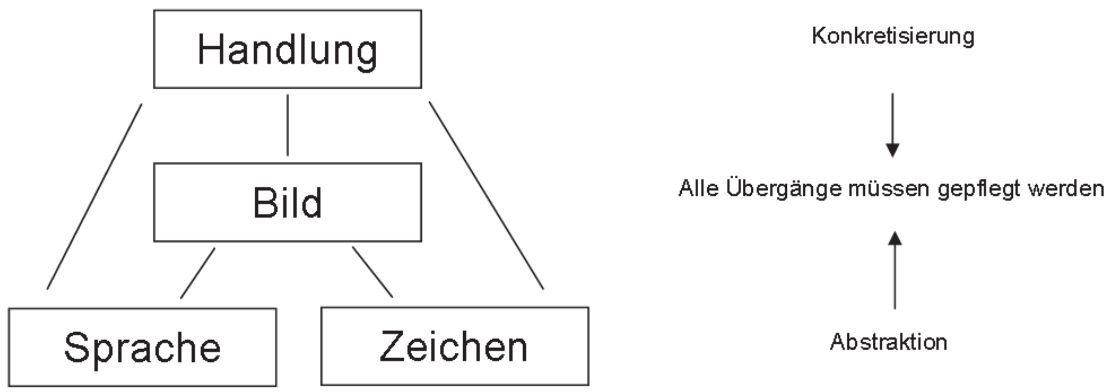


Abbildung 7: Anschauungsebenen

Ordinaler Zahlaspekt

Schulanfänger bringen unterschiedlichste Vorkenntnisse zum Lösen mathematischer Probleme mit. Schon früh haben sie das Zählen mehr oder weniger virtuos als Universalwerkzeug entwickelt. Sicheres, versiertes Zählen ist grundlegend bedeutsam für die gesamte Zahlbegriffsentwicklung. Darauf aufbauend können ein umfassendes Verständnis aller Aspekte und deren wechselseitigen Beziehungen entstehen.

Die Ordinalzahl begegnet uns in zwei unterschiedlichen Formen:

- Als Zählzahl dient sie dazu, Zählprozeduren durchzuführen, z. B. ist fünf das letzte Zahlwort in der Zählreihe von eins bis fünf.
- Als Ordnungszahl legt sie Positionierungen in einer Reihenfolge fest, z. B. die Zahl 5 kann dazu benutzt werden, den Fünften in einer Warteschlange zu benennen.

Auch wenn die Ordnungszahl in Hinblick auf die arithmetischen Operationen unbedeutend erscheint, so spielt sie in Mathematisierungsprozessen und vor allem auch bei didaktischen Arbeitsmitteln, wie z. B. dem Zahlenstrahl eine wichtige Rolle.

Wird der ordinale Zahlaspekt im Unterricht überbetont, besteht große Gefahr für die Kinder, im zählenden Rechnen verhaftet zu bleiben. Die Fehlentwicklung dieses einseitigen Zahlbegriffs führt dazu, dass Zahlen ausschließlich als Zählzahlen verstanden werden. Aufgaben im Zahlenraum bis 100, z. B. 37 + 28, können dann nur noch mühsam gelöst werden. Außerdem steht diese Denkweise dem Begreifen von Strukturgesetzen und dem Aufbau von Rechenstrategien im Weg. Zusammenhänge, wie z. B. 37 + 7 ist so ähnlich wie 7 + 7, können nicht erfasst werden.

Kardinaler Zahlaspekt

Im Laufe des Anfangsunterrichts gilt es nun, die Kinder vom zählenden Rechnen hin zum denkenden Rechnen zu führen. Beim Zählen werden Zahlwörter im Grunde genommen in doppelter Bedeutung verwendet. Jedem zu zählenden Gegenstand wird genau ein Zahlwort (Zählzahl) zugeordnet während alle Gegenstände in eine Reihenfolge gebracht werden:
Beispiel:

eins zwei drei vier fünf

Beim Abzählen der Becher ordnet das Kind also jedem Becher ein Zahlwort zu. Aufgrund seiner Position innerhalb der Ordnung bekommt jeder Becher einen Positionsplatz, eine Ordnungszahl, zugeordnet. D. h. der dritte Becher ist die "Drei". Wird in diesem ordinalen Verständnis der dritte Becher entfernt, so bleibt dennoch der Becher "Fünf" erhalten. Für das Kind stellt es keinen Widerspruch dar, wenn als Ergebnis der Zählprozedur weiterhin „Fünf“ genannt wird.
Erst wenn das Kind Zahlen in ihrem kardinalen Aspekt begreift, erfasst es, dass eine Zahl auch dazu genutzt werden kann, die Anzahl einer Menge anzugeben. Dabei spielt in einem weiteren Lernschritt auch die Erkenntnis, dass Zahlen immer auch aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, eine erhebliche Rolle:

- 5 gibt die Anzahl einer Menge von 5 Elementen an;
- 5 ist eins mehr als 4;
- 5 ist eins weniger als das Doppelte von 3.

Neben der exakten Anzahlfeststellung ist auch die Entwicklung von Größenvorstellungen von Zahlen für die Zahlbegriffsentwicklung von großer Bedeutung. Ergänzend zum Abzählen und strukturierten Zählen (Zählen in Schritten, Notation von Zwischenergebnissen, Gruppieren, Bündeln, usw.) benötigen Kinder deshalb auch vielfältige Gelegenheiten zum Schätzen.

Um zu verhindern, dass Kinder im zählenden Rechnen verhaftet bleiben, ist es hilfreich, möglichst früh die simultane Anzahlerfassung zu trainieren.

Rechenzahlaspekt

Die Tatsache, dass mit Zahlen gerechnet werden kann, erscheint uns Erwachsenen zunächst einmal trivial. Für Schulanfänger verbirgt sich dahinter jedoch eine mehr oder weniger spannende Welt, die nach bestimmten Regeln abzulaufen hat. Damit Rechenaufträge für Kinder keine formalen, sinnentleerten Prozeduren werden, ist es wichtig, im Anfangsunterricht Erkenntnisse auf der

Basis von Handlungen zu gewinnen. Auch im weiteren Verlauf ist es notwendig, die Kinder dabei zu unterstützen, sich immer wieder bewusst zu machen, welche Bedeutungen die einzelnen Zahlen und Rechenzeichen haben. So können zum Beispiel zu Rechensätzen Handlungen durchgeführt, Rechengeschichten erzählt oder Bilder gemalt werden. Je konkreter die Kinder abstrakte Zahlensätze mit Sinn füllen können, desto klarer haben sie den Zahlbegriff erfasst.

Beim Rechnen selbst spielen zunehmend gespeichertes Faktenwissen und bildhaft repräsentierte Vorstellungen der Zahlen eine Rolle. Rechnet ein Kind beispielsweise 7 + 8 nutzt es möglicherweise den bereits vorhandenen abgespeicherten Zahlensatz 7 + 7 = 14. Da es die Zahlbeziehung „7 ist eins weniger als 8“ kennt und auch bildlich vor Augen hat, kann es diese Kenntnis dazu nutzen, um 7 + 7 + 1 = 15 auszurechnen.
Bei der Aufgabe 11 – 9 kann ausgenutzt werden, dass die Zahlen sehr nah beieinander liegen. Dazu ist notwendig, dass das Kind eine klare Vorstellung des Zahlenraums bis 20 hat und sich auch eine räumliche Ausdehnung der Zahlen vorstellen kann. Kann es die Nähe der beiden Zahlen erfassen, ist nur noch notwendig, von 9 auf 11 zu ergänzen. Bei diesem Beispiel wird auch deutlich, wie stark die verschiedenen Zahlbegriffsaspekte in Wechselbeziehung stehen und dass diese Wechselwirkungen zum Aufbau eines adäquaten Rechenstrategieeinsatzes genutzt werden müssen.

Maßzahlaspekt

Im Anfangsunterricht erwerben die Kinder anknüpfend an ihre Vorerfahrungen grundlegende weitere Erkenntnisse in den verschiedenen Größenbereichen, die im ersten Schritt immer auf der Basis konkreter Spiel- und Lebensweltsituationen erfahren und reflektiert werden sollten. Der Maßzahlaspekt kann nur erfasst werden, wenn es vorab gelungen ist, die Zahl 5 von unwesentlichen Merkmalen zu befreien. Nur dann kann 5 universell eingesetzt werden, um gemeinsam mit einer Maßeinheit unterschiedlichste Maßzahlen zu produzieren:

- 5 m gibt an, wie weit ein Ball geworfen wurde;
- 5 h gibt an, wie lange ein Ausflug gedauert hat;
- 5 € gibt an, wie viel ein Buch kostet;
- 5 g gibt an, wie schwer ein Vogel ist.

Alle Größenbereiche beinhalten zahlreiche Konventionen, die sich nicht selbst erklären und im Unterricht daher angemessen thematisiert werden müssen. Zahlenband, Zahlenstrahl, Lineal, Tachometer usw. beginnen nicht wie die Zahlwortreihe bei 1 sondern bei 0. Je nach gewähltem Maßstab (Zahlenstrahl) oder je nach gewählter Gegenstandslänge (Thermometer) beziehen sich die abgebildeten Striche auf andere Zahlenwerte und Einheiten (Einerschritte, Fünferschritte, Zehnerschritte, …).
Eine sorgfältige Erarbeitung und Grundlegung des Verständnisses ist Voraussetzung für die Weiterarbeit in den kommenden Schuljahren, wo immer wieder auf die Modelle (z. B. Uhrmodell, Rechengeld) des Anfangsunterrichts zurückgegriffen wird.

8.5 Arbeitsmittel

Die Qualität des mathematischen Denkens ist stark von individuellen Vorstellungen und Vorstellungsbildern mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Operationen geprägt. Klare innere Vorstellungsbilder bilden eine wichtige Voraussetzung zur Verinnerlichung mathematischer Inhalte. Sie entstehen durch selbst ausgeführte und reflektierte Handlungen, wobei die Handlungsvorschau, -mitschau und -rückschau bedeutsame Phasen darstellen und versprachlicht werden sollten.
Grundlegendes Prinzip des Unterrichts besteht deshalb darin, jedem Kind durch eigenständige Handlungen zu ermöglichen, mathematische Operationen aufzubauen. Sehr wichtig ist in diesem Zusammenhang, die Vorstellungsbilder intensiv zu pflegen. Oft wird im Unterricht viel zu schnell die Anschauungsebene verlassen. Operationen sollten immer wieder auf ihrer anschaulichen Basis verdeutlicht werden bis jedes Kind mentale Vorstellungsbilder entwickeln konnte. Entscheidend ist bei diesem Prozess nicht die Häufigkeit der Handlungserfahrungen, sondern die Reflexion des eigenen Tuns, die Versprachlichung der gesammelten Beobachtungen und Entdeckungen sowie die daraus versprachlichten Schlussfolgerungen. Arbeitsmittel können hierbei wichtige Erkenntnisinstrumente darstellen. In der aktiven Auseinandersetzung konstruiert das Kind an sein bisheriges Wissen anknüpfend eigene Erkenntnis- und Lösungswege, die es anhand des Arbeitsmittels sich selbst und anderen veranschaulichen kann.
Grundsätzlich sind mit Arbeitsmitteln im mathematischen Anfangsunterricht alle Materialien gemeint, die den Kindern bei der Entwicklung und Festigung des Zahlverständnisses und der Operationsvorstellungen helfen sollen. Ziel ist es, den Entwicklungsprozess so weit auszubauen, dass auf alle materialen Mittel schlussendlich verzichtet werden kann.
Der Einsatz von Arbeitsmitteln im mathematischen Anfangsunterricht verfolgt mehrere Absichten:

- zur Unterstützung der Zahlbegriffsentwicklung werden Materialien eingesetzt, mit denen Anzahlen konkret und ikonisch dargestellt werden können;
- auf dem Weg zur Verinnerlichung der Operationsvorstellungen werden die verschiedenen Rechenoperationen handlungsorientiert mit Hilfe von Arbeitsmitteln durchgeführt und reflektiert;
- zur Verfolgung prozessbezogener Kompetenzen werden Arbeitsmittel eingesetzt, um daran Lösungswege zu erproben, zu hinterfragen und zu bewerten. In diesem Zusammenhang bieten Arbeitsmittel hervorragende Möglichkeiten, um eigene Denkschritte, Erkenntnisse und Wege anderen anschaulich darzulegen. Sie unterstützen Kinder in der Argumentations- und Beweisführung.

Sinnvolle Arbeitsmittel stellen also keinesfalls Zähl- oder Vereinfachungshilfen einzelner Aufgaben dar, sondern bieten die Möglichkeit, Vorstellungen und Lösungsideen anschaulich darzustellen, um Denkwege offensichtlich zu machen, einseitige Auffassungen zu verhindern und miteinander ins Gespräch zu kommen. Es geht keinesfalls darum, das Rechnen zu externalisieren. Der Einsatz sinnvoller Arbeitsmittel hat immer zum Ziel, auf der Basis konkreter Handlungen den individuellen Verinnerlichungsprozess zu mathematischen Begriffen, Operationen, Beziehungen, Strategien usw. in konstruktivistischem Sinn voranzubringen. Das Material soll die Kinder dabei unterstützen,

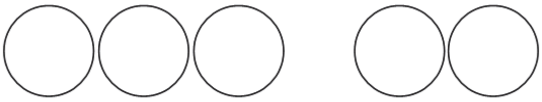
konkret ausgeführte Handlungen, Zahldarstellungen oder die gegenständliche Repräsentation einer Operation nicht nur direkt vor sich liegen zu sehen, sondern auch als mentale Bilder und mentale Operationen aufzubauen. Dabei gilt: Je klarer, einsichtiger und reflektierter die durch die Sinne aufgenommenen Daten sind, desto besser kann die weitere interne Verarbeitung und nur noch mentale Konstruktion erfolgen. Damit tragfähige innere Bilder entstehen und vom Kind auch genutzt werden können, müssen Frage- und Aufgabenstellungen für das Kind bedeutungsvoll sein.
Es muss deshalb unbedingt gewährleistet werden, dass das Material vom Kind nicht als Abzählhilfe verwendet wird. Um hier vorzubeugen, empfiehlt es sich, den Lernprozess mit geeigneten Fragestellungen zu unterstützen. Diese werden dabei so gewählt, dass das Kind das Material zur Verdeutlichung seiner Überlegungen einsetzen kann. Arbeitsmittel bieten also handlungsorientierte Möglichkeiten, Aufgaben trotz eingeschränkter Zahlauffassung und Rechenfähigkeit bewältigen zu können.
Zu beachten ist, dass sich Arbeitsmittel nicht von selbst erklären, sondern selbst einen zu lernenden Unterrichtsinhalt darstellen. Kinder übernehmen nicht immer die vom Lehrenden angestrebten Vorstellungen zu Operationen, sondern entwickeln eigene Interpretationen, die u. U. den Lern- und Verstehensprozess behindern oder sogar verhindern können. Austausch und Klärung möglicher Interpretationen sind daher auch Unterrichtsinhalt. Viele Kinder haben zu Materialien oder Darstellungen sehr individuelle Zugangsweisen und Vorstellungen. Ein Addieren mit Perlen, das Rechnen mit Geld oder mit den Fingern stellen dabei jeweils eigene Mikrowelten dar, die nichts miteinander zu tun haben müssen, d. h., das Kind sieht dann keinen Zusammenhang zwischen den Aufgaben „Nimm 3 Perlen und lege noch 2 dazu!“ und „Du hast 3 € und bekommst noch 2 € geschenkt.“ und „2 + 3 = □“. Die Lösungsstrategien können dabei jeweils auch ganz unterschiedlich ausfallen. Diese Zusammenhänge werden dem Kind erst im fortschreitenden Zahlbegriffsentwicklungsprozess deutlich und sind nicht auf die Schnelle zu verdeutlichen.
Werden im Unterricht mehrere Arbeitsmittel eingesetzt, sollte dem Lehrenden bewusst sein, dass er damit den Kindern immer wieder eine Übersetzungstätigkeit von Material zu Material abverlangt. Bei manchen Kindern tritt dann das Problem auf, dass für sie Zahlstrukturen nicht kompatibel sind. Die Zahl 5 auf dem Zahlenstrahl wird nicht mit der 5 in der Hundertertafel oder 5 Plättchen in Verbindung gebracht. Um diesen Transfer zu leisten, muss das Kind zunächst die Zahlen auf einer höheren Abstraktionsstufe erfasst haben. Unter Umständen muss dann auch jede einzelne Operation neu gelernt werden.
Daher sind möglichst **strukturgleiche Materialien** zu verwenden. Sowohl in der Schule als auch Zuhause müssen Materialien zur Verfügung stehen, die sich leicht ineinander übersetzen lassen.

8.5.1 Arten von Arbeitsmitteln

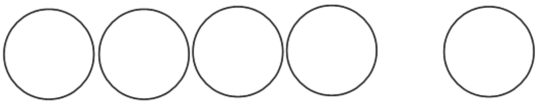
In der Fachliteratur werden verschiedene Arten von Arbeitsmitteln unterschieden, wobei die jeweiligen Autoren die Begrifflichkeiten nicht einheitlich verwenden. Besonders geprägt wurden die Bezeichnungen während der 70er-Jahre des letzten Jahrhunderts im Zuge der Mengenlehre.
Mit unstrukturierten Materialien sind Gegenstände gemeint, die merkmalsarm sind, z. B. Knöpfe, Wendeplättchen, Halmafiguren, Naturmaterialien (Äpfel, Steinchen, Korken, Nüsse, Kastanien, Muscheln, …), einzelne, nicht zusammengesteckte Steckwürfel, Legosteine, usw.. Manche Didaktiker (z. B. J. Lauter) bezeichnen diese Art der Materialien auch als „homogenes“ Material.

Zahlen werden durch das Legen einer entsprechenden Anzahl der einzelnen Gegenstände dargestellt, z. B. die Zahl 5 mit 5 Knöpfen.
Unstrukturierte Materialien sind besonders gut geeignet, um kleine Zahlen bis etwa 5 darzustellen, da sie schnell gelegt sind und auch in wenig strukturierten Anordnungen noch simultan erfasst werden können. Die gelegten Bilder lassen sich leicht in die zeichnerische Ebene übersetzen. Weiterhin lassen sich Zahlzerlegungen ausgezeichnet herstellen und darstellen, wie z. B.

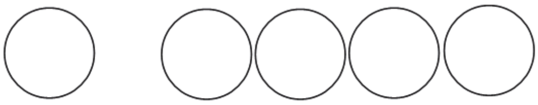
3 + 2



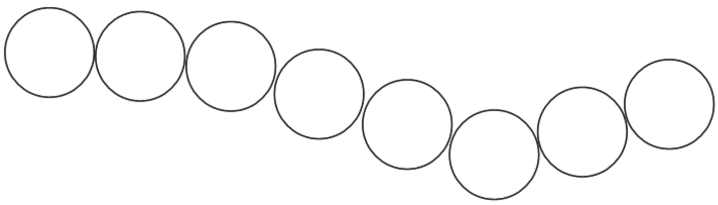
4 + 1



1 + 4



Im Zahlenraum bis 5 ermöglichen unstrukturierte Materialien recht schnelle Zahldarstellungen und flexible Operationen mit ihnen. Sobald der Zahlenraum bis 5 überschritten wird, zeigen sich aber unverkennbare Schwächen dieser Materialien. Unregelmäßige Anordnungen von 8 Plättchen können nicht mehr simultan oder quasi-simultan erfasst werden.



Wird unstrukturiertes Material beim Rechnen im Zahlenraum bis 20 benutzt, kann dies nur durch sukzessives Dazulegen einzelner Elemente geschehen, verbunden mit einem Abzählen von 1 an, Dadurch verfestigt sich jedoch das zählende Rechnen.
Strukturiertes Material fasst Einzelobjekte zu größeren Ganzheiten zusammen, z. B. Zahlenstreifen, Cuisenaire-Stäbe, Rechengeld. Damit wird der sukzessive, zählende Aufbau von Zahlen aus Einzelelementen vermieden. Auch Repräsentanten größerer Zahlen können schnell und ohne Abzählen erfasst werden. Diesen Vorteil erkaufen sich diese Materialien mit zwei Nachteilen. Erstens ist eine flexible Zerlegung kleiner Zahlen wie bei den unstrukturierten Materialien nicht möglich. Zerlegungen von Streifen, Stäben oder Geldstücken sind immer nur durch Umtauschen simulierbar. Zweitens gibt es bei etlichen Materialien Probleme bei der Erweiterung der Zahlen bis 100.

Mischformen sind strukturierte Materialien, die sowohl eine deutliche Fünfer- und Zehnergliederung aufweisen und somit eine quasi-simultane Auffassung der Zahlen von 5 bis 10 gestatten und darüber hinaus Möglichkeiten bieten, mit einzelnen Bausteinen zu operieren. Beispiele hierfür sind Zehner- und Zwanzigerfelder in Verbindung mit Wendeplättchen, Rechenrahmen und Abakus.
Inwieweit die jeweiligen Vor- und Nachteile der einzelnen Arbeitsmittel zum Tragen kommen, hängt entscheidend vom unterrichtlichen Vorgehen ab. Nur wenn im Unterricht z. B. angemessene Lern- und Übungsgelegenheiten geboten werden, in denen zählende Zahldarstellungen durch quasi-simultane abgelöst werden, besteht die Chance, dass Kinder die vom Arbeitsmittel offerierten Chancen auch nutzen können. Sehr geeignet sind hier beispielsweise Übungen zur Zahlauffassung und -darstellung, in denen die Kinder zu wenig Zeit für zählende Lösungen haben.

8.5.2 Auswahl von Arbeitsmitteln

Die Auswahl der Arbeitsmittel sollte sehr sorgfältig nach folgenden Beurteilungskriterien erfolgen:

- Ermöglicht es die Entwicklung von inneren Vorstellungsbildern?
- Erlaubt es die Übertragung in die ikonische Repräsentationsebene?
- Können die am Material konkret handelnd durchgeführten Operationen auch nur in der Vorstellung durchgeführt werden?
- Unterstützt der Umgang mit dem Material die Gedächtnisleistung, in dem sie das taktile Gedächtnis anspricht?
- Erlaubt es Transfermöglichkeiten zu Darstellungen aus der Vorstellungswelt der Kinder bzw. zu anderen Anschauungsmitteln?
- Genügt es den feinmotorischen Fähigkeiten der Kinder? Ist es praktikabel? (Wegräumen, Transport nach Hause)
- Ermöglicht es die Entwicklung eigener Strategien und Lösungswege? Erlaubt es bei der gleichen Aufgabe mehrere verschiedene Lösungswege?
- Vermeidet es die Verfestigung zählender Rechenstrategien?
- Ist es für viele verschiedene Inhaltsbereiche nutzbar? Können damit möglichst viele arithmetische Aufgabenstellungen visualisiert werden?
- Unterscheidet es klar zwischen dem kardinalen und ordinalen Zahlaspekt?
- Ermöglicht es eine klare Rechts-Links-Unterscheidung? Oder verwirrt es Kinder mit Richtungs- und Seitigkeitsproblemen?
- Wird an dem Modell der Stellenwertbegriff und das Bündelungsprinzip deutlich? Kann das Kind dekadische Analogien daran deutlich erfassen?

8.5.3 Auswahl von Fördermaterialien

Bei der Beurteilung geeigneter Fördermaterialien spielen zusätzlich folgende Anforderungen eine besondere Rolle:

- Ermöglicht es Erfolgserlebnisse?
- Wird vor Automatisierungsprozessen grundsätzlich die Einsicht in den mathematischen Sachverhalt ermöglicht? Nur was verstanden ist, kann auch nachhaltig abgespeichert werden.
- Erfolgt unmittelbar eine Rückmeldung? Damit sich keine Fehler einschleichen, muss das Kind möglichst rasch Rückmeldung zu seinem Tun erhalten. Automatisiert wird nur, wenn zwischen dem Nennen von Aufgabe und Ergebnis maximal eine Sekunde liegt.
- Können die Stoffmengen individuell angepasst werden? Kann ein Kind die Stoffmenge überschauen, wird es wesentlich motivierter an die Arbeit gehen und besser abspeichern können.
- Gibt es eine angemessene Vielfalt der Methoden und Darstellungsformen? Zur Festigung und Automatisierung von Wissen eignen sich eher einfache Methoden, die häufig wiederholt werden.
- Werden aufwändige schriftliche Methoden vermieden?
- Wurden Anschauungsmaterialien sorgfältig ausgewählt und werden diese angemessen eingesetzt?
- Werden Denkprozesse durch intermodalen Transfer angeregt und vertieft? Werden Erkenntnisse verbalisiert?

8.6 Operationsverständnis zu Addition und Subtraktion

Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule ist es, dass Kinder sicher rechnen können und tragfähige Zahl- und Operationsvorstellungen aufbauen. Daher muss eine grundlegende Frage sein, wie diese Vorstellungsbilder in den Köpfen der Kinder aufgebaut werden.

Diese mentale Vorstellung, die es den Kindern ermöglicht, ohne Material zu rechnen, kann nur entstehen, wenn Kinder zuvor immer wieder Handlungen durchgeführt, beobachtet und beschrieben haben.

Aufgabe des Mathematikunterrichts ist bei den Schülerinnen und Schülern, den Weg von der aktiven Handlung zur tragfähigen mentalen Vorstellung anzubahnen und diese fürs Rechnen nutzbar zu machen. Es muss ein Einklang bestehen zwischen den Vorstellungen von Zahlen und den damit verbundenen Operationen und den mathematischen Begriffen und Symbolen. Diese kontinuierliche Förderung von „Grundvorstellungen“ ist von entscheidender Bedeutung für den Aufbau mathematischer Kompetenzen.

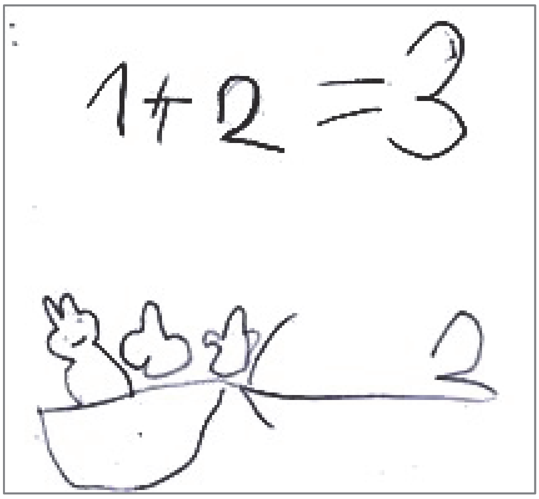
Fehlt diese Möglichkeit des Rückgriffs auf mentale Bilder, die mathematische Strukturen indizieren oder werden nur Details abgespeichert, führt dies zu wiederkehrenden teils kaum erklärbaren Fehlern.

Dieser Weg, Rechenoperationen durch Handlungen (enaktiv), durch Bilder (ikonisch) sowie durch Sprache, Zeichen und Symbole (symbolisch) darzustellen zu lernen, darf niemals eine Einbahnstraße sein. Es darf nicht allein darum gehen, Kinder von der enaktiven über die ikonische zur symbolischen Darstellung zu führen. Es geht vielmehr darum, die Fähigkeit zu fördern, flexibel zwischen den einzelnen Darstellungsformen wechseln zu können und deren Inhalte in eine andere Darstellungsebene „übersetzen“ zu können. Ein Bild zu einer Rechnung zu malen oder eine passende Handlung szenisch darzustellen, fördert dieses flexible Übersetzen (intermodaler Transfer).
Eine geeignete Methode, die individuellen Bilder zum Ausdruck bringen zu können und die mentalen Vorstellungen der anderen wahrnehmen zu lernen, bieten auch Eigenproduktionen der Kinder.

8.6.1 Addition

$$\boxed{7 + 4 = 11}$$

Welche Handlungen könnten durch diese Additionsaufgabe symbolisiert werden und wie könnten diese Handlungen dargestellt werden? Welche Handlungsmodelle sollen die Kinder kennenlernen?
Addieren stellt zwei unterschiedliche Handlungen dar. Es gibt einen dynamischen und einen statischen Handlungsaspekt.
Zum einen ist es die Vorstellung des dynamischen Hinzufügens einer Menge zu einer anderen.
In Schulbüchern wird dies u. a. durch die folgenden Verben beschrieben: dazukommen, hinzufügen, auftauchen, dazulegen, herbeizaubern, geschenkt bekommen, hereinkommen.
Lässt man Schüler eigene Rechengeschichten zeichnen, wird diese Vorstellung durch ähnliche Bilder wie die folgenden dargestellt.



„Ich habe einen Osterhasen gefunden und dann noch zwei. Dann waren es drei Osterhasen."

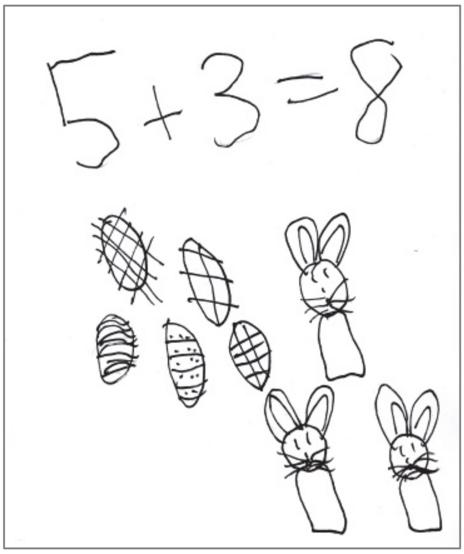
Abbildung 8: Rechengeschichte Osterhase

„Vier Luftballons steigen hoch. Fünf sind schon oben."

Abbildung 9: Rechengeschichte Luftballons

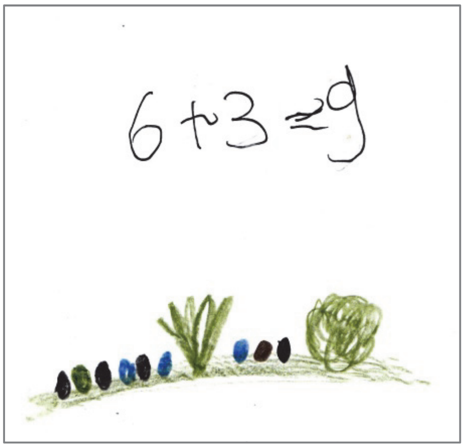
Wenn Schüler diese Vorstellung zum Beispiel mit Plättchen nachlegen sollen, wählen sie meist eine Plättchenfarbe und legen zuerst die eine Teilmenge legen anschließend die zweite Teilmenge mit der gleichen Plättchenfabe hinzu.
In verschiedenen Schulbüchern wird dies durch das Zusammenschieben von Plättchen oder Stäben oder Zusammenstecken von Steckwürfeln verdeutlicht.

Eine andere Vorstellung ist die des Zusammenfügens zweier Mengen von oft unterschiedlichen Objekten. Kinder stellen dies wie folgt dar:



„An Ostern habe ich 5 Schokoeier und 3 Schokohasen bekommen. Das sind 8 Süßigkeiten."

Abbildung 10: Rechengeschichte Ostern



„Ich habe 6 Eier auf der einen Seite vom Busch gefunden und 3 auf der anderen Seite. Ich habe 9 Eier gefunden."

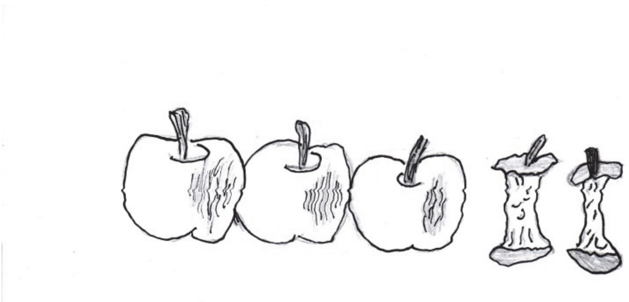
Abbildung 11: Rechengeschichte Eier

Bittet man die Schülerinnen und Schüler, dies mit Plättchen darzustellen, wählen sie hier zwei unterschiedliche Farben, um die beiden Teilmengen beschreiben zu können.

8.6.2 Subtraktion

15 - 8 = 7

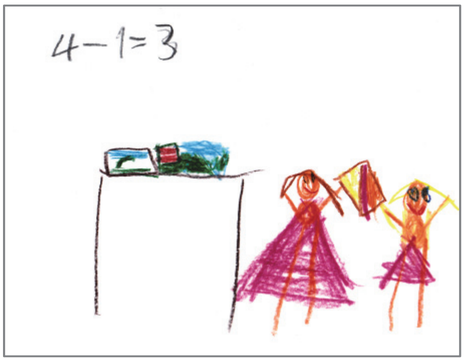
Welche Handlungen könnten durch diese Subtraktionsaufgabe symbolisiert werden und wie könnten diese Handlungen dargestellt werden? Welche Handlungsmodelle sollen die Kinder kennenlernen?
Auch bei der Subtraktion gibt es den statischen und den dynamischen Handlungsaspekt.
Der dynamische Aspekt wird durch Handlungen wie wegfliegen, wegfahren, auspusten, leer essen, austrinken dargestellt.
Für Kinder problematisch ist die bildnerische Darstellung dieser Handlungen, die in vielen Schulbüchern zu finden ist.



____ - ____ = ____

Abbildung 12: Äpfel

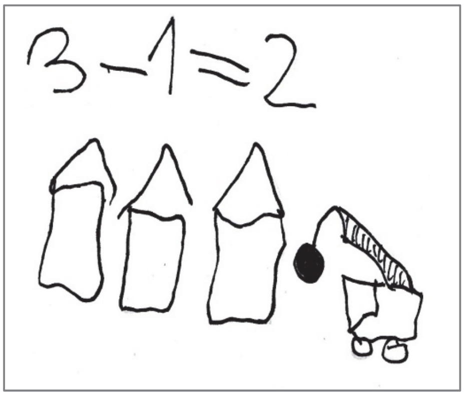
Es wird das Ende der Handlung beschrieben. Vielen Kindern fällt es zunächst schwer die Ausgangsmenge zu analysieren. In selbstgefertigten Rechenbildern ist diese Darstellung zu Beginn nur selten zu finden.



„Ich habe vier Bilder gemalt. Eines habe ich verschenkt. Auf dem Tisch liegen noch drei Bilder."

Abbildung 13: Rechengeschichte Bilder

Bittet man Kinder, Subtraktionen selbst darzustellen, wählen sie meist andere Darstellungsformen. Kinder zeichnen die Ausgangsituation und symbolisieren die Handlung des Verringerns durch Gegenstände oder Pfeile.



„In der Straße sind 3 Häuser: Es kommt ein Bagger und macht eines kaputt. Dann sind es nur noch zwei Häuser."

Abbildung 14: Rechengeschichte Häuser

„Auf dem Tisch sind 5 Bonbons. Ich esse 3.
2 sind übrig."

Abbildung 15: Rechengeschichte Bonbons

Um eine Übersetzung der Handlung in eine bildnerische Darstellung zu erleichtern bietet sich besonders bei der Subtraktion die Darstellung in Drei-Bild-Geschichten an.

$\boxed{5 - 2 = 3}$

Abbildung 16: Drei-Bild-Geschichte Schneemänner

Dieses dynamische Wegnehmen wird in den Schulbüchern meist durch Durchstreichen von Plättchen symbolisiert.

O	O	O	O	O	O	~~O~~	~~O~~		

Der statische Aspekt der Subtraktion als Unterschied zwischen einer Teilmenge und der Gesamtmenge taucht in den Schulbüchern nur wenig auf. Diesem Aspekt liegt der Gedanke des Ergänzens zugrunde.
In Schülerbüchern wird dies zum Beispiel durch "Einfangen mit dem Lasso" der Teilmenge dargestellt.

O	O	O	O	O	O	O	O		

In Rechenbildern ist dieser Aspekt auch kaum zu sehen.

„Von den 12 Eiern gehören mir 6 Eier. Die anderen gehören meiner Schwester."

Abbildung 17: Rechenbild Eier

Die verschiedenen Beispiele zeigen, dass bildnerische Darstellungen ein wichtiges Instrument sind, um Zahl-und Operationsvorstellungen entstehen zu lassen. Sie zeigen jedoch auch, welche Schwierigkeiten und Verständnisprobleme auftauchen können und auf was zu achten ist. (vgl. KIRA)

Literatur

- Hasemann, K.: Anfangsunterricht Mathematik. Spektrum. Berlin 2007 S. 100-111
- KIRA-Kinder rechnen anders: Arithmetik bis zum 2. Schuljahr In: www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=206, Zugriff am 13.11.2013
- Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik. Spektrum, Berlin 2007.
- Radatz, H. / Schipper, W. / Dröge, R. / Ebeling, A: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1996.
- Radatz, H. / Schipper, W. / Dröge, R. / Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1998.
- Selter, C. / Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Klett, Leipzig / Stuttgart / Düsseldorf 1997.

8.7 Die Null

Betrachtet man Rechenergebnisse von Schülerinnen und Schülern, so zeigt sich, dass eine große Fehlerhäufigkeit bei Aufgaben vorhanden ist, die den Umgang mit der Null erfordern. Die Herausforderung, die die Null den Kindern im Mathematikunterricht bereitet, hat ihren Ursprung in den Besonderheiten dieser Zahl. Besonders ist sie im Hinblick auf die historische Entwicklung, den alltäglichen Sprachgebrauch und ihre spezielle Rolle bei den verschiedenen Rechenoperationen.
In unserem Alltag wird die Null in den unterschiedlichsten Zusammenhängen verwendet. Wir sprechen von Nulltarifen, Nullprozentfinanzierungen und Nulldiäten. Ergebnisse und Abläufe werden annulliert. Redewendungen wie „Zurück auf Null“, „Das Jahr Null“ bzw. „Wir fangen nochmals bei Null an“ symbolisieren einen Neuanfang. Null-Bock und Null-Ahnung sind nur zwei Beispiele mit negativer Bedeutung, die sich im allgemeinen Sprachgebrauch etabliert haben. 007 und 00 kennen wir ebenfalls alle.
Um die Ausnahmestellung im Mathematikunterricht verstehen zu können, hilft ein Blick auf die Geschichte der Null.

8.7.1 Geschichte der Null

Die meisten Kulturen der letzten Jahrtausende kannten die Zahl Null nicht.
In verschiedenen Hochkulturen wie z. B. bei den Babyloniern symbolisierte eine Lücke bzw. ein Fehlzeichen die Stelle ohne Wert. Gemeinsam war ihnen, dass diese Zahlsymbole für die Null anfänglich nur eine Funktion als Platzhalter hatten, um Fehlinterpretationen beim Lesen zu verhindern. Die Vorstellung einer Menge von null Elementen entwickelte sich vermutlich erst später.

In Ägypten fand sich in einer Tempelinschrift eine Hieroglyphe mit der Bedeutung „nichts“. Die könnte bedeuten, dass den Ägyptern die Null bereits bekannt war und auch dargestellt wurde.
Bei den Griechen und Römern gab es dagegen keine Zahl Null.
Unsere Darstellung der ovalförmigen Null hat ihren Ursprung vermutlich in Indien. Dort entwickelte sich im sechsten Jahrhundert ein Positionssystem, Wurzel unseres Stellenwertsystems. Die Vereinfachung des Rechnens und die leichte Verständlichkeit der Zahlen ließen auch die Chinesen und die Araber dieses System übernehmen. Durch Handelsbeziehungen und die Kreuzzüge kamen das Stellenwertsystem und die Null letztendlich auch nach Europa.
Leonardo da Pisa (Fibonacci) befasste sich bereits zu Beginn des 13. Jahrhunderts mit der Null. Durch den Widerstand der Kirche, die in der Null „Teuflisches“ sah, dauerte es noch viele Jahre bis sich der Gebrauch der Null durchsetzen konnte.

8.7.2 Bedeutung der Null

Betrachtet man die Herausforderungen, die die Null an die Schüler stellt, muss zwischen der Null als Ziffer und der Zahl Null unterschieden werden.
Die Null als Ziffer erhält ihre Bedeutung im Zusammenhang mit dem Stellenwertsystem. Hier ist sie unabdingbar für die Zahldarstellung. Erst durch die Hinzunahme der Null ist es möglich alle Zahlen als Kombination mit nur zehn unterschiedlichen Symbolen eindeutig darzustellen.
Bei Schuleintritt kennen die meisten Kinder die Ziffer Null und können diese auch schreiben. In vielen Schulbüchern wird die Ziffer Null auch von Anfang an zum Aufschreiben der Zahl 10 verwendet.
Im Gegensatz hierzu ist die Einführung der Zahl Null jedoch nicht so unproblematisch. Bei der Betrachtung der Null und ihrer Bedeutung im Hinblick auf die verschiedenen Zahlaspekte werden die Besonderheiten deutlich.

Kardinalzahlaspekt

Die Mächtigkeit einer Menge erhält man durch das Zählen der Elemente dieser Menge. Für die Null gilt nun aber, dass sie nicht das Ergebnis einer solchen Zählhandlung ist. Es ist stattdessen „nichts“ zum Zählen vorhanden.
Im alltäglichen Sprachgebrauch wird diese leere Menge mit verschiedenen Synonymen umschrieben. Die Frage „Wie viele Äpfel“ wird mit „keine“ beantwortet. Null wird daher für viele Kinder mit „nichts“ gleichgesetzt.

Operatoraspekt

Für die Angabe der Vielfachheit einer Handlung gilt Entsprechendes.
Auf Fragen beispielsweise, wie oft man bereits am Nordpol war, antwortet man normalerweise „noch nie“ oder „gar nicht“ aber vermutlich nicht „0 mal“. Auch eine Handlungsanweisung wie „Hüpfe 0 mal“ wird in der Realität nie auftauchen.

Ordinalzahlaspekt

Fragen, wie z. B.: „Der wievielte?“ oder „An welcher Stelle?“ erfordern als Antwort eine Ordnungszahl. Die Zahl Null taucht hier nicht auf. Ausdrücke wie „nullte Stunde" oder „nulltes Kapitel" weisen im Sprachgebrauch meist auf etwas Vorangestelltes hin. Der einzige Gebrauch im Alltag ist die Bezeichnung des Kellergeschosses als nullte Etage.

Maßzahlaspekt

Auf die Feststellung von Größen anhand von Größeneinheiten trifft ähnliches zu wie auf die vorangegangenen Aspekte. In Verbindung mit Längen, Gewichten und Hohlmaßen gibt es kaum Alltagssituationen, in denen die Null auftaucht. Bei der Größeneinheit Geld wiederum werden häufig Synonyme wie „kostenlos“ oder „gratis“ verwendet. Einzig die Temperatureinheit Celsius wird häufig im Zusammenhang mit der Null erwähnt. Der Gefrierpunkt ist eine alltagsrelevante Referenzgröße.

Rechenzahlaspekt

Auf die Stolpersteine, die beim Rechnen mit der Null auftauchen, wurde bereits eingangs hingewiesen. Diese werden später noch genauer betrachtet werden.

Codierungsaspekt

Dies ist der einzige Zahlaspekt, bei dem die Null kein Alleinstellungsmerkmal besitzt. In Telefonnummern, Pin-Nummern oder Autokennzeichen hat sie die gleiche Bedeutung wie jede andere Zahl auch.
Zusammenfassend zeigt sich, dass die Kinder im Alltag die Null als Zahlwort kaum kennenlernen. Dies dürfte einer der Gründe sein, warum die Null zwar als Ziffer, jedoch kaum als Zahl wahrgenommen wird. (vgl. KIRA)

8.7.3 Rechnen mit der Null

Bei den vier Grundrechenarten weist das Rechnen mit der Null Besonderheiten auf. Im Bereich der Addition und Subtraktion erhält man durch Addieren bzw. Subtrahieren der Null zu bzw. von einer beliebigen Zahl jeweils wieder diese Zahl.
Kinder erscheinen die Rechnungen häufig als sinnlos oder nicht berechenbar. Häufig vorkommende Ergebnisse sind dann 8 – 0 = 0 und 8 + 0 = 0.
In der Multiplikation ist das Ergebnis immer Null, wenn einer der Faktoren Null ist.
Kinder rechnen hier häufig 7 • 0 = 7 („Null ist nichts, also ändert sich nichts“)
Eine Division durch Null ist nicht möglich.

8.7.4 Möglichkeiten der Umsetzung im Unterricht

Das Operieren mit der Zahl Null muss für die Kinder stets die Erkenntnis beinhalten, dass es vernünftig und sinnvoll ist, diese als „richtige“ Zahl zu betrachten. Der falschen Vorstellung des „Nichts-Charakters“ der Null sollte von Anfang an entgegengewirkt werden.

Beim Zählen verschiedener Mengen und der unterschiedlichen Darstellung der Mengen lässt sich die Besonderheit der Zahl und ihre Sinnhaftigkeit altersgemäß darstellen.

Wir zählen ab, wie viele Obststücke an einem Obststand vorhanden sind.
Es wird dokumentiert, wie viele Obststücke zu Beginn und nach mehreren Spielsituationen des Verkaufens noch vorhanden sind. Die Anzahlen werden in einer Tabelle aufgeschrieben.
Die Anzahl der Bananen werden die Kinder voraussichtlich mit „keine“ verbalisieren. In der Zeile der Strichliste werden sie wahrscheinlich einen Querstrich eintragen, um dies zu verdeutlichen. Wenn man nun diese Situation mit Zahlen darstellen will, muss auf die Null als Verdeutlichung der leeren Menge zurückgegriffen werden. (vgl. Hasemann 2007)

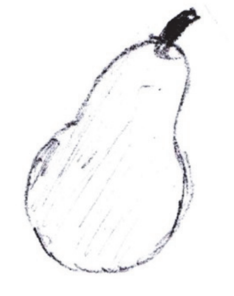
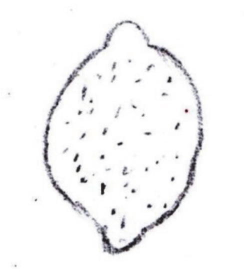
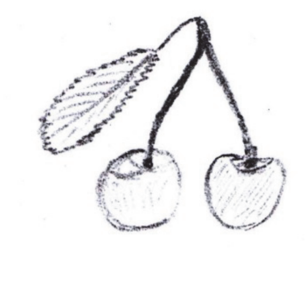
				
IIII	II	III		II
4	2	3	0	2

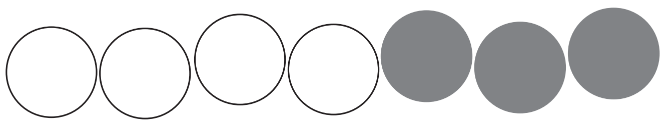
Tabelle 5: Obststücke

Bei einer weiteren Darstellung der Spielsituationen wird in den Rechnungen der Zahlcharakter der Null ebenfalls deutlich.

5 – 5 = 0
(Von 5 Bananen werden 5 verkauft. Jetzt sind noch null Bananen in der Kiste)

4 + 2 + 3 + 0 + 2 = 11
(Am Ende waren insgesamt noch 11 Obststücke in den Körben; einschließlich der Bananen.)

Ähnliche Situationen bieten sich bei verschiedenen Umfragen an. Beispielsweise können Alter der Kinder, Anzahl der verschiedenen Haustiere, Hobbies oder Lieblingsgetränke erfragt und deren Anzahlen entsprechend dokumentiert werden.
Die Null als notwendige Darstellung einer leeren Teilmenge kann über die Ergebnisse beim „Plättchenwerfen“ erarbeitet werden.
„Ich werfe 7 Wendeplättchen in die Höhe. Wie viele rote und wie viele blaue Plättchen liegen nun auf dem Tisch? Wie schreiben wir dies auf?"



Als Beispiel für die Verwendung der Null als Operatorzahl bietet sich das Rückwärtszählen verbunden mit einer Handlung an.
Beispiel: Ein Kind hat 5 Seifenblasen, plötzlich zerplatzt eine nach der anderen, dann sind es noch 4, 3, 2, 1, 0 Seifenblasen.

Ähnliche Situationen bieten das Verspeisen von Süßigkeiten, das Ausräumen von Kisten, Abhängen von Bildern und der Countdown als Rückwärtszählen mit Null als Startkommando für eine Handlung.
Eine weitere Verdeutlichung der Null als Rechenzahl kann bei der Erarbeitung von „schönen Päckchen" erfolgen. Das Rechnen mit der Null wird von den Kindern als natürliches Element einer Aufgabenreihe erkannt.

Beispiel:

5 – 5 = 0
5 – 4 = 1
5 – 3 = 2
5 – 2 = 3
5 – 1 = 4
5 – 0 = 5

Auch bei offenen Aufgabenstellungen nutzen die Kinder die Null um möglichst viele und leicht rechenbare Aufgaben zu finden und aufzuschreiben.

Beispiel:
Finde möglichst viele Aufgaben mit einem Ergebnis ≤ 20

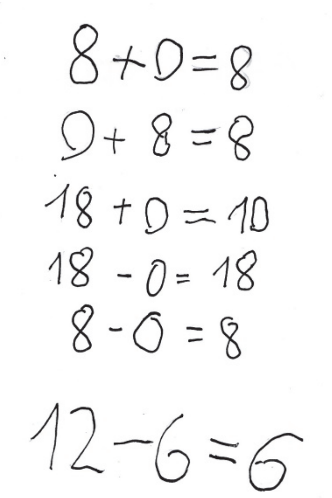


Abbildung 18: Aufgaben mit einem Ergebnis ≤ 20

Literatur

- Hasemann, K.: Anfangsunterricht Mathematik. Spektrum, Berlin 2007.
- Hefendehl-Hebeker, L.: Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, insbesondere in der Primarstufe. In: mathematica didactica Heft 4 (1981). Seite 239-252
- KIRA – Kinder rechnen anders: Null: nichts – oder nicht? In: www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=293, Zugriff am 13.11.2013
- Selter, C. / Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Klett, Leipzig / Stuttgart / Düsseldorf 1997.