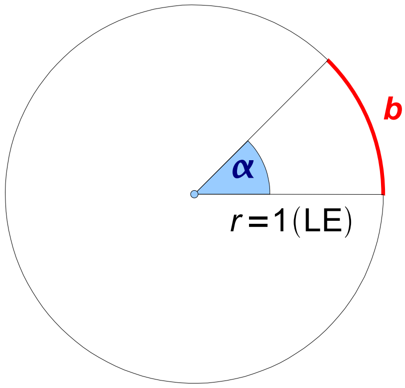
Einführung Trigonometrie (Teil 3)

Das Bogenmaß

Was ist das Bogenmaß?



Das Bogenmaß ist eine alternative Größe zur Winkelmessung. Hiermit lassen sich Winkel ebenso exakt beschreiben, wie mit Gradangaben. Anstatt der Winkelgröße im Gradmaß verwenden wir beim Bogenmaß die Maßzahl der Länge des entsprechenden Kreisbogens *b* auf dem Einheitskreis.

Bekanntlich hat ein Kreises mit dem Radius *r* den Umfang $u = 2\pi \cdot r$. Damit vereinfacht sich beim ***Einheitskreis*** sich die Länge der Kreislinie auf $2\pi\,(\text{Längeneinheiten})$.

Umrechnung Winkelmaß-Bogenmaß

Ein Winkel α bildet stets den gleichen Anteil am Vollkreis (360°) wie die zugehörige Bogenlänge b an 2π.

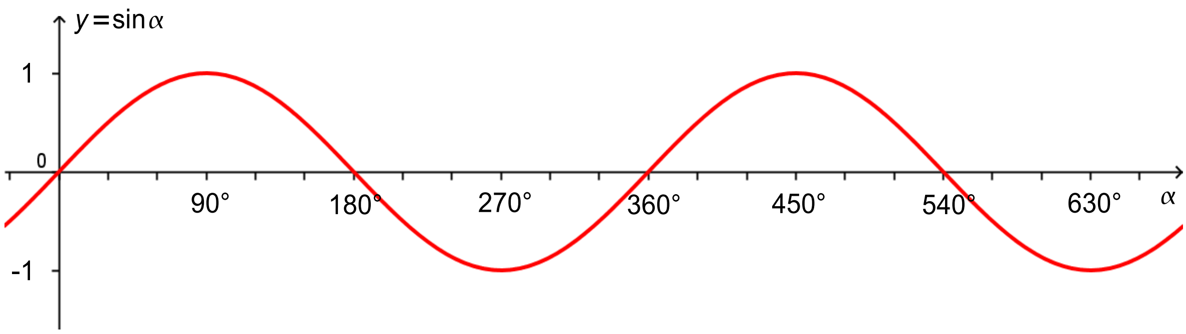
$$\text{Kurz: } \frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}$$

Aus dieser Verhältnisgleichung folgen sofort Formeln für die Umrechnung vom Winkelmaß ins Bogenmaß (bzw. umgekehrt):

$$\alpha = 360° \cdot \frac{b}{2\pi} \qquad \left(\text{bzw. } b = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}\right)$$

Wofür braucht man das Bogenmaß?

Wir wissen, dass beispielsweise Sinus jedem Winkel α genau einen Wert zwischen -1 und 1 zuordnet. Wenn wir die Sinuswerte über den entsprechenden Winkeln auftragen, erhalten wir das folgende Schaubild:



Gewöhnlich werden auf der x-Achse aber keine (Winkel-)Größen, sondern nur die entsprechenden Maßzahlen aufgetragen. Daher wird in der Regel bei den Winkelfunktionen das ***Bogenmaß*** verwendet. (Hier gibt es keine Einheit und die Zahlenwerte auf der Rechtsachse sind „handlich“ klein.)

Wenn wir das Bogenmaß verwenden, schreiben wir künftig $\sin x$ (anstatt $\sin\alpha$). Analog natürlich auch $\cos x$ bzw. $\tan x$.

Hinweise:

1. Bedenke, dass $\frac{\pi}{6}$ dem (wichtigen) 30°-Winkel entspricht. Vergleiche dies mit der „$\frac{1}{3}/\frac{1}{2}-Regel$“ ganz am Ende von Teil 2.
2. Aus $\pi\approx 3$ folgt $\frac{\pi}{6}\approx 0{,}5$. Daher wählen wir beim Koordinatensystem für die Achsenunterteilung der Rechtsachse Vielfache von $\frac{\pi}{6}$.

Aufgaben:

1. Begründe die Sinuswerte (im obigen Schaubild) für 180°, 270°, 450° und 630° am Einheitskreis.
2. Gib mit der Abschätzung $\pi\approx 3$ ungefähre Winkelmaße für die Bogenmaße 1; 2; 3; … 6 an.
   Vergleiche diese Winkel mit den exakten Werten des Taschenrechners. Wie groß ist bei dir der relative Fehler?
   $$\left(\text{Relativer Fehler } = \frac{|(\text{exakter Wert - geschätzter Wert})|}{\text{exakter Wert}}\right)$$
3. Zeichne die Schaubilder der Sinusfunktion $f(x)=\sin x$ und der Kosinusfunktion $g(x)=\cos x$ für $x\in[0;4\pi]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
4. Gib mit Hilfe der Sinusfunktion einen Funktionsterm an, so dass das entsprechende Schaubild dem der Kosinusfunktion entspricht.