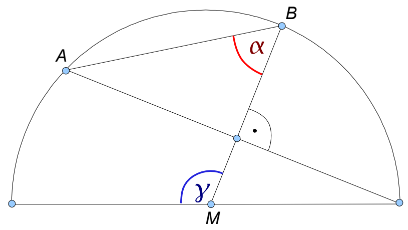
Lösungsvorschlag Aufgabe 5, Beweisen ist klasse! (Teil 3)

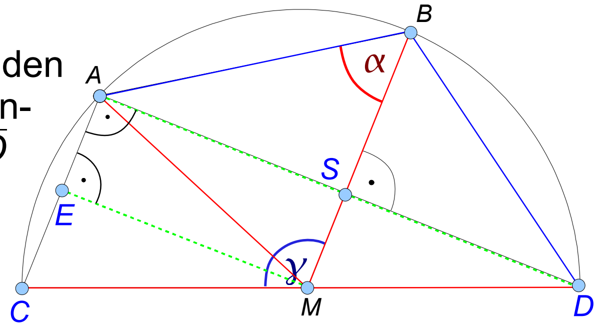
Aufgabe 5:



Wie kann man α berechnen, wenn γ bekannt ist?

Lösungsvorschlag:

Vorüberlegungen:



Zeichnet man alle Verbindungslinien zwischen den markierten Punkten, so erhält man das Drachenviereck $ABMD$ mit den beiden Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BM}$.

Die Dreiecke $\Delta ACM, \Delta BAM, \Delta DBM$ und DAM sind gleichschenklig (mit gleichen Basiswinkeln).

Schritt 1:

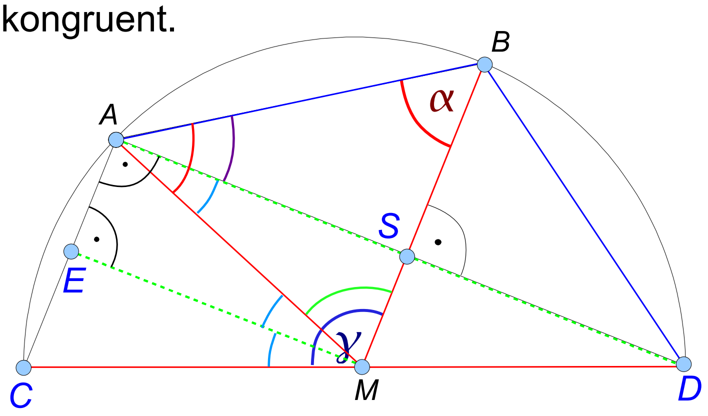
Mit dem Satz von Thales folgt, dass der Winkel $\sphericalangle DAC$ ein rechter ist. Hieraus folgt wiederum, dass die Höhe $\overline{EM}$ im Dreieck ΔACM parallel zu $\overline{AD}$ ist. Damit ist $\overline{EM}$ auch halb so lang wie $\overline{AD}$ (warum?).

Weil $\overline{MS}$ parallel zu $\overline{AE}$, folgt aufgrund der parallelen grünen Strecken die Gleichheit $\overline{MS} = \overline{AE}$.

Außerdem haben die Dreiecke ΔAEM und MSA bei *E* bzw. *S* einen rechten Winkel.

$\rightarrow$ Mit wsw folgt die Kongruenz der Dreiecke ΔAEM und MSA. Aufgrund der Spiegelsymmetrie zur Höhe im gleichschenkligen Dreieck ΔACM sind auch die Dreiecke ΔAEM und CEM kongruent.

Schritt 2:



ΔBAM ist gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$ somit folgt für den grünen Winkel bei *M*: $\sphericalangle BMA = 180° - 2\alpha$.

Für den lila Winkel bei A folgt wegen dem rechten Winkel bei S in ΔBAS: $\sphericalangle SAB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$\rightarrow$ Damit folgt für den hellblauen Winkel bei *A*: $\sphericalangle MAS = \alpha - \text{lila} = \alpha - (90° - \alpha)$
Also $\sphericalangle MAS = 2 \cdot \alpha - 90°$.

Schritt 3:

Aufgrund der in Schritt 1 gezeigten Kongruenz setzt sich der Winkel γ aus dem grünen Winkel und zwei hellblauen zusammen:
$\rightarrow$ $\gamma = \sphericalangle BMA + 2 \cdot \sphericalangle SAB = 180° - 2\alpha + 2 \cdot (2\alpha - 90°) = \mathbf{2\alpha}$

$\rightarrow$ Der Winkel γ ist doppelt so groß wie der Winkel α.