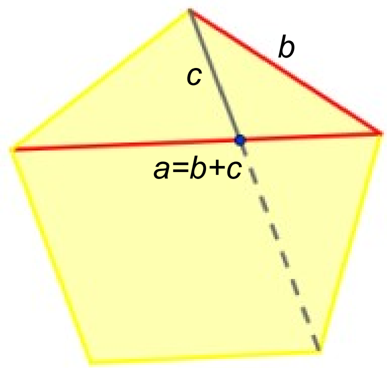
Der goldene Schnitt

Misst man bei einem regelmäßigen Fünfeck gewisse Längen und bildet daraus ein Verhältnis, stößt man auf eine überraschende Eigenschaft. So ist beispielsweise das Verhältnis der Diagonalen zur Seitenlänge gleich dem Verhältnis des langen Diagonalenabschnitts zum kurzen, wobei der lange Diagonalenabschnitt genauso lang wie eine Fünfeckseite ist .



Zentrale Frage: Wo muss man eine Strecke *a* teilen, so dass das Verhältnis aus großem Teil *b* durch kleinen Rest *c* gleich dem Verhältnis aus Gesamtstrecke *a* durch großen Teil *b* ist?

Kurz: $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$. Diese Forderung entspricht (mit $a=b+c$):

$$\rightarrow \frac{b}{c}=\frac{b+c}{b} \qquad (1)$$

Dieses Verhältnis ist nicht nur in der Mathematik ein ganz besonderes. Auch in der Kunst gilt es als besonders „ästhetisch“. Bei vielen Gebäuden stehen Länge und Breite oder Breite und Höhe im gleichen Verhältnis wie die bezeichneten Längen im regelmäßigen Fünfeck. Sogar in der Musik und der Literatur findet man dieses Verhältnis – dem „***goldenen Schnitt***“. Betrachtet man die Gesamtlänge des Stücks, so bildet hier der Höhepunkt oft den goldenen Schnitt, d. h. Anfang und Ende bilden unser „goldenes Verhältnis“.

Übrigens: bei vielen Menschen teilt der Bauchnabel die Körpergröße im goldenen Schnitt. Bei den antiken Statuen ist es generell so. (→ Im nächsten Griechenland-Urlaub nachmessen!)

Weitere Vorkommen des goldenen Schnitts z. B. unter http://de.wikipedia.org

Der goldene Schnitt ist natürlich nichts anderes als eine Zahl. Gewöhnlich wird diese mit dem großen griechischen Buchstaben Phi (Φ) abgekürzt.

Mit (1) finden wir recht schnell eine berühmte quadratische Gleichung (2), deren positive Lösung unserem goldenen Schnitt Φ entspricht:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{b+c}{b} = \frac{b}{b}+\frac{c}{b} = 1+\frac{c}{b} \\
\Phi &= 1+\frac{1}{\Phi} && |\cdot\Phi \\
\Phi^2 &= \Phi+1 && |-\Phi-1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi^2-\Phi-1 = 0} \qquad (2)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung findet man z. B. mit der *p-q-*Formel:

$\rightarrow$ mit $p=q=-1$ folgt:: $\boxed{\Phi_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)}$ (3)

Mit dem Taschenrechner erhalten wir zwei Näherungswerte:

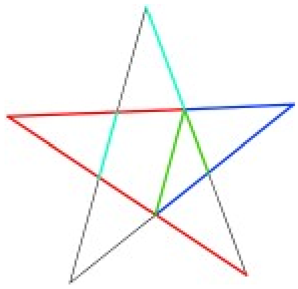
Die Summe ergibt $\Phi_1 \approx 1{,}6180$, die Differenz $\Phi_2=-0{,}6180$. **Da ein Verhältnis niemals negativ sein kann, liefert die positive Lösung unseren golden Schnitt.**

Die größere Länge beträgt somit etwas mehr als das $\frac{8}{5}$-fache der kürzeren.

Aufgaben und Fragen:

1. Berechne mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die folgende „Kettenwurzel“: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}}}$.
2. Bilde die Verhältnisse von jeweils zwei der ersten 10 aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen sowie die Kehrwerte dieser Verhältnisse.
3. Oft wird der Kehrwert von Φ_1 als goldener Schnitt bezeichnet. Warum macht auch das Sinn?

Hinweis:



Die Diagonalen des regelmäßigen 5-Ecks bilden ein Pentagramm. Dieses Pentagramm war das Zeichen der pythagoreischen Gemeinschaft (um 500 v. Chr.). Nach der Philosophie dieses Geheimbundes musste sich die Natur in Verhältnissen zu natürlichen Zahlen ausdrücken lassen: alles musste *kommensurabel* sein!

Leider gibt es aus dieser Zeit kaum belegtes Wissen. Der Erzählung nach soll ein Schüler des Pythagoras, Hippasos, ausgerechnet am Erkennungszeichen der Pythagoräer (!), den Nachweis erbracht haben, dass sich gewisse Streckenverhältnisse nicht durch ein Verhältnis natürlicher Zahlen darstellen lassen (- also inkommensurabel sind). Die Verhältnisse der farbig markierten Strecken ergeben den golden Schnitt und diese Zahl ist irrational!

Die erste Krise der Mathematik hatte begonnen. Das Ergebnis passte einfach nicht in das Weltbild der Geheimbündler. Es verwundert daher nicht, dass Hippasos keinen natürlichen Todes starb. Er ertrank im Meer.