Vorwort

Vom Schuljahr 2014/15 an wird beginnend mit der Eingangsklasse der Beruflichen Gymnasien Mathematik nach Lehrplänen unterrichtet, die sich an den KMK-Bildungsstandards[1] ausrichten.
Die erste Abiturprüfung nach diesen inhaltlich an die Bildungsstandards angepassten Lehrplänen wird im Jahr 2017 stattfinden.

Die Bildungsstandards legen besonderen Wert darauf, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur fachliche, sondern insbesondere auch prozessbezogene Kompetenzen erwerben.
Inhaltlich wurden die neuen Lehrpläne den Bildungsstandards entsprechend ergänzt.
Die Orientierung an zentralen Ideen wurde beibehalten, neu hinzugekommen ist die Orientierung an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen[2]

- Mathematisch argumentieren (K1)
- Probleme mathematisch lösen (K2)
- Mathematisch modellieren (K3)
- Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
- Mathematisch kommunizieren (K6)

Die vorliegenden Musteraufgaben sind für den Einsatz im Unterricht gedacht und können von den Aufgabenformaten, die in der Abiturprüfung Gültigkeit haben, abweichen.

Abiturmusteraufgaben wurden ebenfalls erarbeitet und stehen den Lehrkräften ebenfalls als Unterstützung zur Verfügung.

---

[1] http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

[2] Bildungsstandards S. 10 ff.

Inhaltsverzeichnis

Musteraufgaben für die schriftliche Abiturprüfung ab 2017

Aufgabensatz A

- Teil 1 (ohne Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe mit den Inhalten Analysis, Stochastik, Lineare Algebra in zwei Ausführungen (je nach Lehrerwahl innerhalb der Linearen Algebra):
    - Variante mit Matrizen
    - Variante mit Vektoren

- Teil 2 (mit Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe zur Analysis (evtl. mit Anwendung)

- Teil 3 (mit Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe zur Linearen Algebra
    - Matrizen
    - Vektorgeometrie

- Teil 3 (mit Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe zur Stochastik

Aufgabensatz B

- Teil 1 (ohne Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe mit den Inhalten Analysis, Stochastik, Lineare Algebra in zwei Ausführungen:
    - Variante mit Matrizen
    - Variante mit Vektoren

- Teil 2 (mit Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe zur Analysis (evtl. mit Anwendung)

- Teil 3 (mit Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe zur Linearen Algebra
    - Matrizen
    - Vektorgeometrie

Aufgabensatz C

- Teil 1 (ohne Hilfsmittel):
  Eine Aufgabe mit den Inhalten Analysis, Stochastik, Lineare Algebra in zwei Ausführungen:
    - Variante mit Matrizen
    - Variante mit Vektoren

Musteraufgaben	**Berufliches Gymnasium**	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	**Teil 1 (ohne Hilfsmittel)**	**Variante mit Matrizen**

Punkte

Analysis

1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral 3 K4 K2 A2

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

2 Für eine Funktion f gilt: 4 K6 A2

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

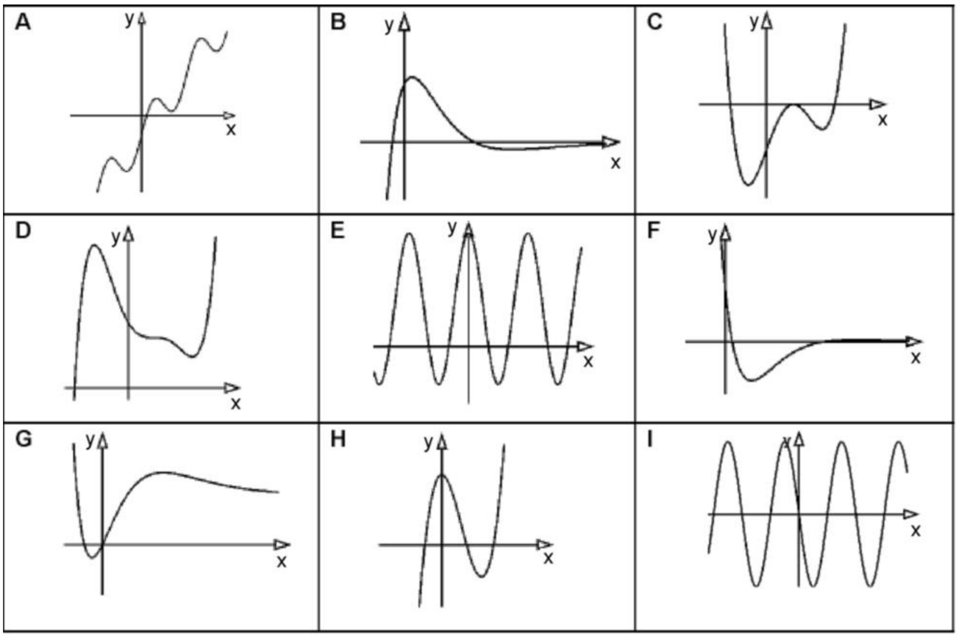
(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in$ IR. 4 K5 A1 A2

Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung cos(2x) = -1.

4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. 5 K4 A3
Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu:

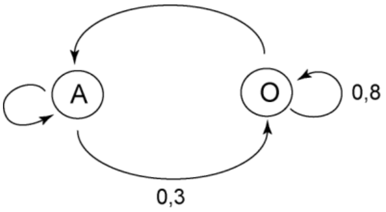


Punkte

Matrizen

5 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 4 K4 A1 K6 A2

Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ 0{,}3 & \ldots \end{pmatrix}$ an.

Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

6 Gegeben ist die Matrix 3 K5 A2

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;
E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

Stochastik

7 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2 K5 A1

8 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2 K6 A2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null."
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

9 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 3 K5 A2

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

30

Punkte

Kompetenzraster:

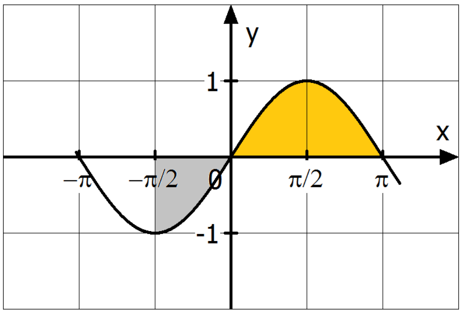
→ Kompetenzen → ↓ Anforderungsniveaus ↓	K1	K2	K3	K4	K5	K6
A1				5	3,7	
A2		1		1	3,5,6,9	2,6,8
A3				4		

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

1 Skizze: 3 K4 A2 K2



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse. Daher ist das Integral positiv.

2 Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H\left(-2\,\middle|\,\frac{19}{3}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(1\,\middle|\,\frac{11}{6}\right)$. 4 K6 A2

3 Periode: $p = \pi$ 4 K5 A1 A2

Mit der Substitution $2x = a$ erhält man die Gleichung $\cos(a) = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = \pi$. Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

4 5 K4 A3

	Schaubild von f	Schaubild von f'	Schaubild von f''
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

Matrizen

5 4 K4 A1 K6 A2

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte		
6	$(E-A)\cdot\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow 0{,}2x_1-0{,}6x_2=0 \wedge -0{,}2x_1+0{,}6x_2=0$ Folglich gilt: $x_1=3x_2$ und $x_2=u$; $u\in\mathbb{R}$. Somit ergibt sich: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$.	3	K5	A2
Stochastik				
7	B: Bild, Z: Zahl. Ereignis A: Zweimal Z und einmal B. $P(A)=P(BZZ)+P(ZBZ)+P(ZZB)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$.	2	K5	A1
8	Gegenereignis: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null.	2	K6	A2
9	$E(X)=0{,}2$ $-3\cdot0{,}2-u+5\cdot0{,}2=0{,}2 \Leftrightarrow u=0{,}2$ Ferner gilt: 0,2 + 0,2+ w + 0,2 = 1. Somit ist w = 0,4 .	3	K5	A2
		30		

Punkte

Analysis

1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral 3 K4 K2 A2

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

2 Für eine Funktion f gilt: 4 K6 A2

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

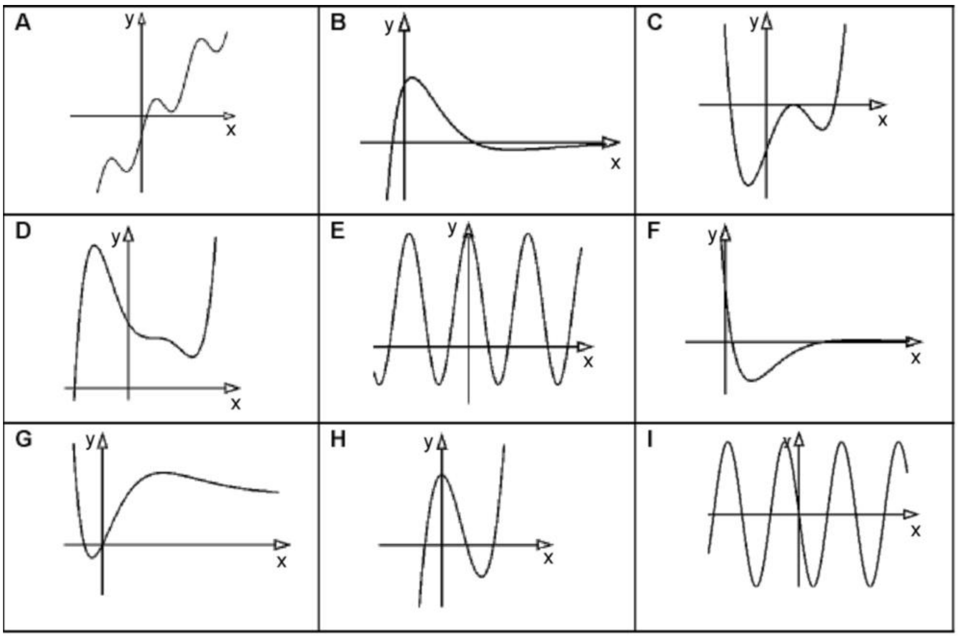
(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in IR$. 4 K5 A1 A2

Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung cos(2x) = – 1.

4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. 5 K4 A3
Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu:



Punkte

Vektorgeometrie

5 Gegeben ist die Gerade — 4 — K4 A1, K6 A2

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ r \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.
Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

6 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems — 3 — K5 A2

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \quad . \end{aligned}$$

Stochastik

7 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? — 2 — K5 A1

8 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. — 2 — K6 A2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

9 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: — 3 — K5 A2

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

30

Punkte

Kompetenzraster:

→ Kompetenzen → ↓ Anforderungsniveaus ↓	K1	K2	K3	K4	K5	K6
A1				5	3,7	
A2		1		1	3,5,6,9	2,5,8
A3				4		

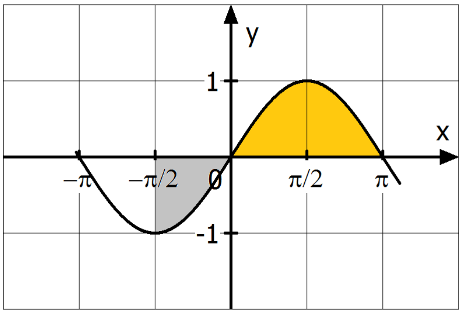
Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

1 Skizze: 3 K4 A2 K2



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse. Daher ist das Integral positiv.

2 Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H\left(-2 \,\middle|\, \frac{19}{3}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(1 \,\middle|\, \frac{11}{6}\right)$. 4 K6 A2

3 Periode: $p = \pi$ 4 K5 A1 A2

Mit der Substitution $2x = a$ erhält man die Gleichung $\cos(a) = -1$.

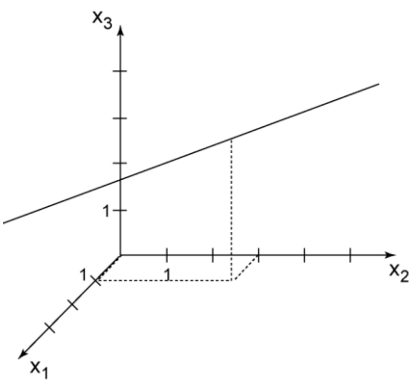
Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = \pi$. Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

4 5 K4 A3

	Schaubild von f	Schaubild von f'	Schaubild von f''
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

Vektorgeometrie

5 4 K4 A1 K6 A2



Die Gerade g verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene.

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte		
6	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right)$ Die zweite Zeile liefert $x_2 = 1$, die dritte Zeile jedoch $x_2 = \frac{7}{3}$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass das LGS unlösbar ist.	3	K5	A2
	Stochastik			
7	B: Bild, Z: Zahl. Ereignis A: Zweimal Z und einmal B. $P(A)=P(BZZ)+P(ZBZ)+P(ZZB)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$.	2	K5	A1
8	Gegenereignis: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null.	2	K6	A2
9	$E(X)=0{,}2$ $-3\cdot 0{,}2-u+5\cdot 0{,}2=0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad u=0{,}2$ Ferner gilt: 0,2 + 0,2+ w + 0,2 = 1. Somit ist w = 0,4 .	3	K5	A2
		30		

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 2 (mit Hilfsmittel)	Analysis

Punkte

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}(x-1)) + 1;\ x \in \mathrm{IR}$.

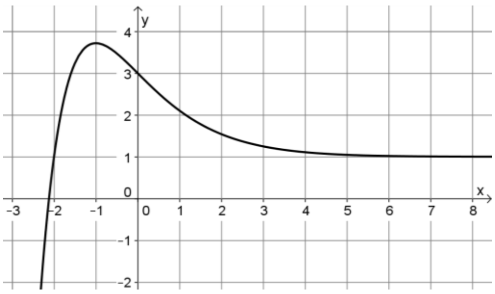
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit y = sin(x)? — 7 — K1 A2
Skizzieren Sie K. — K4 A1

1.2 Geben Sie die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von K an. — 6 — K2 A1
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die parallel ist zur Normalen an K in einem dieser Wendepunkte. — K5 A2

1.3 Die Gerade mit der Gleichung y = 1 und das Schaubild K begrenzen Flächenstücke. Berechnen Sie den Inhalt eines dieser Flächenstücke. — 5 — K5 A2

2 Das folgende Schaubild gehört zu einer Funktion g
mit $g(x) = (x+a) \cdot e^{-x} + b$.



2.1 Bestimmen Sie a und b. — 3 — K4 A2, K5 A2

2.2 G ist eine Stammfunktion von g. — 6 — K1 A2, K4 A2
Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?
Begründen Sie.

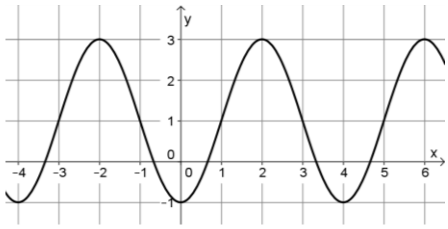
1. Das Schaubild von G besitzt eine schiefe Asymptote, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.
2. Das Schaubild von G besitzt an der Stelle x = – 1 einen Hochpunkt.
3. Das Schaubild von G hat einen Tiefpunkt auf der x-Achse.
4. $\int_{-2}^{3} g(x)\,dx > 15$

2.3 Die Gerade x = u mit $-1 < u < 4$ schneidet die x-Achse im Punkt Q und das Schaubild von g im Punkt P. — 3 — K5 A2
Diese beiden Punkte bilden mit R(–1|0) ein rechtwinkliges Dreieck.
Geben Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u an.

30

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 2 (mit Hilfsmittel)	Analysis

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
1.1	Strecken in y-Richtung mit Faktor 2, Strecken in x-Richtung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$, Verschieben in y-Richtung um 1 und Verschieben in x-Richtung um 1	4	K1 A2
		3	K4 A1
1.2	$W_1(1\|1)$, $W_2(3\|1)$ $\quad f'(x)=\pi\cdot\cos(\frac{\pi}{2}(x-1))$ Verwendung von W_2: $f'(3)=\pi\cdot\cos(\pi)=-\pi$ $m_T=-\pi$ $\quad m_N=\frac{1}{\pi}$ $\quad$ Ursprungsgerade: $y=\frac{1}{\pi}x$ (oder $y=-\frac{1}{\pi}x$ bei W_1)	6	K2 A1 K5 A2
1.3	$\int_1^3 (f(x)-1)\,dx=\int_1^3 (2\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))\,dx=\left[-\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}(x-1))\right]_1^3=\frac{8}{\pi}$	5	K5 A2
2.1	Mit aus dem Schaubild abgelesenen Punkten (0|3) und (–2|1): g(0) = 3: $\quad a+b=3$, also $b=3-a$ (1) g(–2) = 1: $\quad -2\cdot e^2+a\cdot e^2+b=1$ $\quad$ (2) (1) in (2): $-2\cdot e^2+a\cdot e^2+3-a=1\Leftrightarrow e^2(a-2)=a-2\Rightarrow a=2$ Aus (1): $b=1$ (oder: Asymptote y = b; aus der Zeichnung: b = 1; mit (1): a = 2)	3	K4 A2 K5 A2
2.2	1. Richtig, da b = 1 und aus 1 wird beim Integrieren x. 2. Falsch, da dort ein Wendepunkt vorliegt. 3. Unentscheidbar wegen der Integrationskonstante 4. Falsch, denn z. B. beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD mit A(–2|0), B(3|0), C(3|3) und D(–2|3) 15 FE und das Rechteck ist eindeutig größer als die in 4. beschriebene Fläche.	6	K1 A2 K4 A2
2.3	$A(u)=\frac{1}{2}(u+1)\cdot g(u)$	3	K5 A2
		30	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Matrizen

1	Drei Energieversorger A, B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 2800 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher den Energieversorger zu wechseln. Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C. Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C. Von C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B. Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger. Im Jahr 2014 sind 1000 Haushalte bei A und 1000 bei B, die übrigen bei C.		
1.1	Geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2015 beliefert werden.	4	K3 A1 K5 A1
1.2	Bei welcher Ausgangssituation würden sich die Anteile der Haushalte bei den einzelnen Versorgern durch das angegebene Wechselverhalten nicht ändern?	10	K3 A1 K5 A2
	Stellen Sie diese Verteilung im Kreisdiagramm Abbildung 1 auf dem Arbeitsblatt graphisch dar.		K4 A2
1.3	Wenn das oben beschriebene Wechselverhalten auch von 2015 nach 2016 gilt, entsteht eine Verteilung der Haushalte auf die Energieversorger, die im Kreisdiagramm Abbildung 2 auf dem Arbeitsblatt unvollständig dargestellt ist.	5	K5 A1
	Ergänzen Sie die fehlenden Bezeichnungen und Werte. Beschreiben Sie die Unterschiede der Verteilungen in Abbildung 1 und 2.		K4 A2 K6 A1
2	In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:		

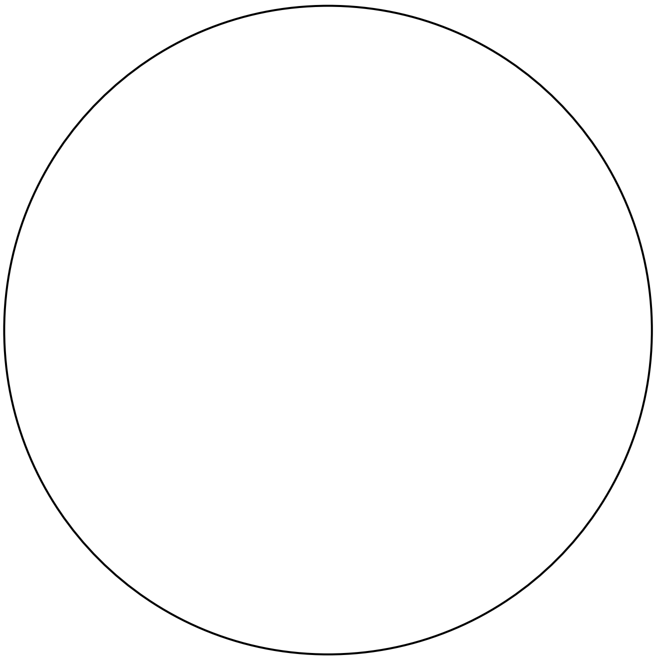
zu \ von	A	B	D
A	0,3	0,2	u
B	0,5	0,6	v
D	0,2	0,2	w

2.1	Angenommen, u hat den Wert 0,1. Welche Werte für v und w sind dann möglich?	4	K1 A1
	Nehmen Sie Stellung zur Behauptung: Die Kunden von B zeigen mehr Kundentreue als die von A.		K1 A2
2.2	Bestimmen Sie u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie 1 : 3 : 1 verhalten.	7	K3 A3 K5 A2
		30	

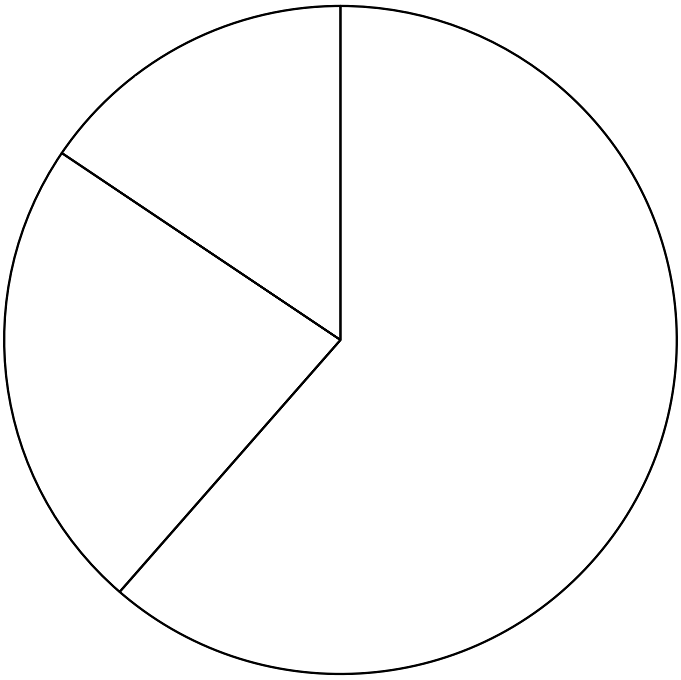
Musteraufgaben	**Berufliches Gymnasium**	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	**Teil 3 (mit Hilfsmittel)**	**Matrizen**

ARBEITSBLATT

1.2 Abbildung 1 K4 A2



1.3 Abbildung 2 K4 A2



Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Matrizen

Matrizen

Kompetenzraster

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Summen
A1	2.1 2		1.1 2 1.2 3		1.1 2 1.3 1	1.3 2	**12**
A2	2.1 2			1.2 3 1.3 2	1.2 4 2.2 4		**15**
A3			2.2 3				**3**
Summen	**4**	**0**	**8**	**5**	**11**	**2**	**30**

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
1.1	Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$	2	K3 A1
	$U \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$ Von A werden 680, von B 1600 und von C 520 Haushalte beliefert.	2	K5 A1
1.2	$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E - U) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2800 - x - y \end{pmatrix}$:	3	K3 A1
	$0{,}7\,x - 0{,}1\,y - 280 = 0$ $0{,}8\,y - 1400 = 0$ $-0{,}7\,x - 0{,}7\,y + 1680 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 650$, $y = 1750$, $z = 2800 - x - y = 400$ Wenn 650 Haushalte von A, 1750 von B und 400 von C beliefert werden, gibt es keine Änderung. Kreisdiagramm siehe Arbeitsblatt	4	K5 A2
1.3	$U \cdot \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 644 \\ 1720 \\ 436 \end{pmatrix}$ Im Jahr 2016 sind 644 Haushalte bei A, 1720 bei B und 436 bei C. Kreisdiagramm siehe Arbeitsblatt	1	K5 A1
	Beschreibung In Abbildung 2 ist die Reihenfolge der Sektoren A und B vertauscht. Im Vergleich zum stabilen Zustand (Abbildung 1) ist im Jahr 2016 (Abbildung 2) die Anzahl der Haushalte bei A um 6 und die der Haushalte bei B um 30 kleiner. Dementsprechend hat C 36 Haushalte mehr zu beliefern.	2	K6 A1

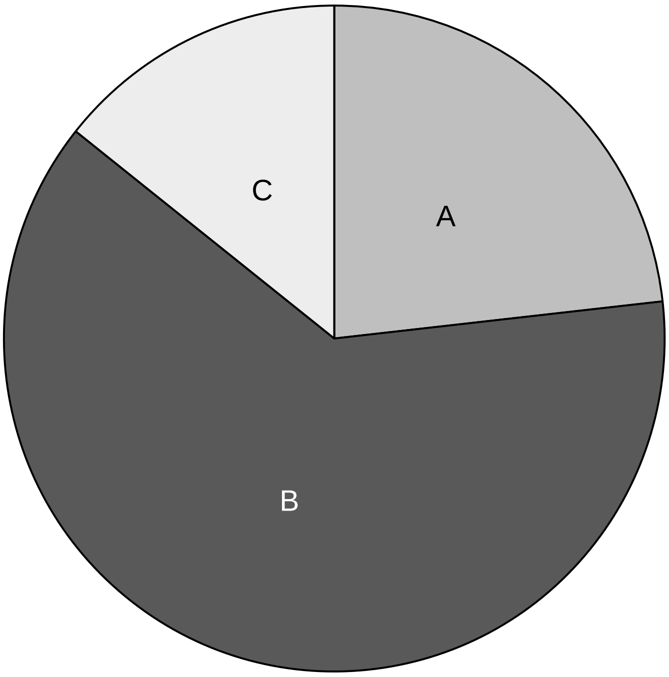
LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
2.1	Für u = 0,1 gilt v + w = 0,9. v und w können Werte aus dem Intervall [0; 0,9] annehmen. Dabei gilt w = 0,9 – v.	2	K1 A1
	Die Zahl 0,6 in der Tabelle bedeutet, dass 60 % der Kunden von B nicht wechseln, während nur 30 % der Kunden von A bei A bleiben. Daher ist es angemessen, von größerer Kundentreue bei den Kunden von B zu sprechen.	2	K1 A2
2.2	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x \end{pmatrix}$; Die Spaltensumme ist 1, deshalb gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & u \\ 0{,}6 & 0{,}6 & v \\ 0{,}2 & 0{,}2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$	3	K3 A3
	$\Leftrightarrow \begin{matrix} 0{,}18 + 0{,}2\,u = 0{,}2 \\ 0{,}46 + 0{,}2\,v = 0{,}6 \\ 0{,}16 + 0{,}2\,w = 0{,}2 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ u = 0,1 ; v = 0,7 ; w = 0,2	4	K5 A2
		30	

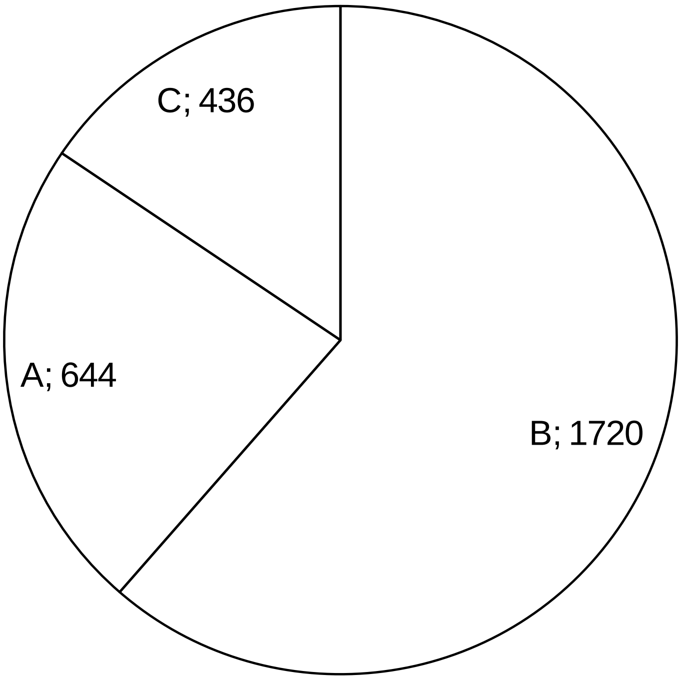
LÖSUNGSVORSCHLAG ARBEITSBLATT

Punkte

1.2 Abbildung 1 3 K4 A2



1.3 Abbildung 2 2 K4 A2



		Punkte	
1	Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$ und $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=0$.		
1.1	Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel.	6	K1 A1 K5 A1
1.2	Die Ebene F verläuft durch den Punkt A(–5|0|1) und ist orthogonal zur Geraden g. Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem?	6	K4 A2 K6 A1
	Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.		K5 A2
2	Gegeben sind die Punkte A(2|0|1), B(–1|2|1), C(1|5|4) und D(3|0|5).		
2.1	Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.	3	K1 A1 K5 A1
2.2	Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte einer Pyramide. Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem. Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.	4	K4 A2 K6 A1
2.3	Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.	7	K5 A2
2.4	Auf die Pyramide ABCD fallen Lichtstrahlen, die parallel zur x_3-Achse verlaufen. In diesem Licht wirft die Pyramide einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide in das Koordinatensystem aus 2.2. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.	4	K3 A1 K4 A2
		30	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Vektorgeometrie

Punkte

Kompetenzraster

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Summen
A1	1.1 2 2.1 2		2.4 2		1.1 4 2.1 1	1.2 1 2.2 1	**13**
A2	1.2 3			1.2 2 2.2 3 2.4 2	2.3 7		**17**
A3							**0**
Summen	**7**	**0**	**2**	**7**	**12**	**2**	**30**

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.1 Schnitt von g und E: 3 K1 A1 K5 A1

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$$

Die Gleichung hat genau eine Lösung. Die Ebene E und die Gerade g schneiden sich in dem Punkt D(1|1|–2).

Berechnung des Schnittwinkels: 3 K5 A1

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{28}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 34{,}54°$$

1.2 Der Richtungsvektor von g ist gleichzeitig der Normalenvektor von F. 2 K4 A2

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Ebene F verläuft parallel zur x_1-Achse. 1 K6 A1

Zwei Ebenen können parallel zueinander liegen, identisch sein oder sich in einer Geraden schneiden. Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden, wenn ihre Normalenvektoren keine Vielfachen voneinander sind. Die beiden Normalenvektoren lauten: 3 K6 A2

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle $k \in IR$.

Also schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

2.1 3 K1 A1 K5 A1

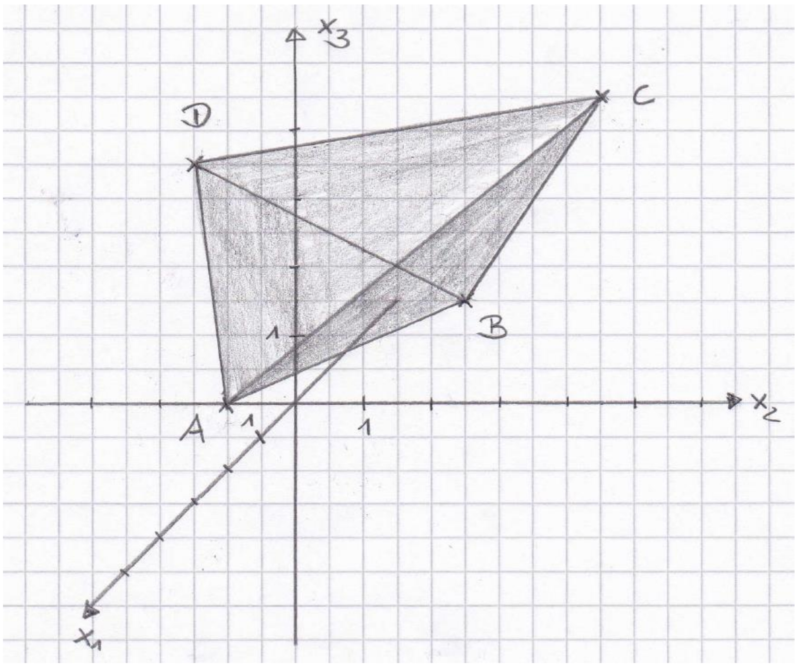
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, liegt bei B ein rechter Winkel vor.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

2.2 — 3 K4 A2



Die Punkte A und D liegen in der x_1x_3-Ebene. — 1 K6 A1

2.3 Berechnung des Normalenvektor $\vec{n}_E$ der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt: — 4 K5 A2

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Gleichung von E in Koordinatenform: $E:\ 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = d$

Punktprobe mit z. B. A(2|0|1) liefert: $E:\ 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = -1$

Hesse´sche Normalenform: $E:\ \dfrac{6x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 1}{\sqrt{286}} = 0$

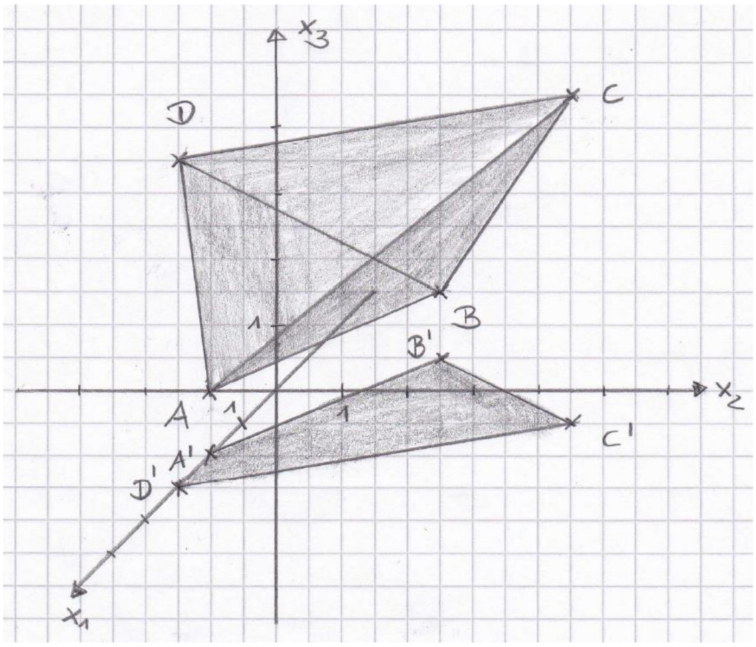
Abstand Spitze D zur Ebene E: $d(D,E) = \left| \dfrac{6 \cdot 3 + 9 \cdot 0 - 13 \cdot 5 + 1}{\sqrt{286}} \right| = \dfrac{46}{\sqrt{286}}$

Grundfläche: $G = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{22} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{286}$ — 3

Volumen: $V = \dfrac{1}{3} G \cdot d(D,E) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{286} \cdot \dfrac{46}{\sqrt{286}} = \dfrac{46}{6} = \dfrac{23}{3} \approx 7{,}67$

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Vektorgeometrie

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
2.4	Durch die parallel zur x_3-Achse einfallenden Lichtstrahlen werden die Eckpunkte A, B, C, D der Pyramide in die x_1x_2-Ebene projiziert. Die x_3-Koordinate dieser Punkte wird nullgesetzt. Der Schatten der Pyramide wird festgelegt durch $A'(2\,|\,0\,|\,0)$, $B'(-1\,|\,2\,|\,0)$, $C'(1\,|\,5\,|\,0)$ und $D'(3\,|\,0\,|\,0)$.	2	K3 A1
		2	K4 A2
		30	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz A	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Stochastik

Punkte

1 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt.
Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.
Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 €. Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von 100 €.

1.1 Anton bucht dieses Angebot. 5 K3 A1
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse: K5 A1

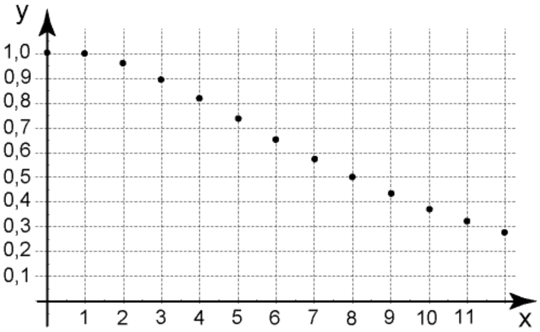
A: Anton erlebt keinen Sturmtag.
B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.
C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage.

1.2 Anton erhält die Rückerstattung von 100 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt? 4 K5 A2

1.3 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will. 5 K1 A2

1.4 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“ 5 K4 K6 A2

Im nachfolgenden Schaubild liegen die dargestellten Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$.



Interpretieren Sie das Schaubild und beantworten Sie Antons Frage.

		Punkte		
1.5	Der Hotelier plant, an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.			
1.5.1	Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann.	2	K6	A1
1.5.2	Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert?	3	K5	A1
1.6	Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der Sturmtage nach n Januartagen. Die Zufallsvariable X ist näherungsweise normalverteilt, wenn die Standardabweichung von X mindestens den Wert 3 hat.			
	Prüfen Sie, ob X näherungsweise normalverteilt ist, wenn der Hotelier die Wetterstatistik des Monats Januar von 10 Jahren auswertet.	2	K5	A1
1.7	Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gästen sind 96 zufrieden. Bestimmen Sie ein 95 % Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste.	4	K1 K5	A3 A2
		30		

.

Punkte

Kompetenzraster

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
A1			2		8	2
A2	5			2	5	3
A3	3					

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.1 $P(A) = 0{,}8^7 \approx 0{,}21$ — 5 — K3 A1, K5 A1

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0131$

$\overline{C}$: höchstens ein Sturmtag. $P(\overline{C}) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}577$

$\Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}423$

1.2 D: Anton erhält eine Rückerstattung. — 4 — K5 A2
E: Anton erlebt genau drei Sturmtage.

$$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{P(E)}{P(D)} \approx \frac{0{,}115}{0{,}148} \approx 0{,}775$$

mit
$P(D) = 1 - P(\overline{D})$ mit $\overline{D}$: weniger als drei Sturmtage

$$P(\overline{D}) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}852 \Rightarrow P(D) \approx 0{,}148$$

$$P(E) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}115$$

1.3 — 5 — K1 A2

Zufallsvariable X:
Einnahmen des Hoteliers

x_i	500	300
$P(X = x_i)$	0,852	0,148

mit $P(X = 500) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}852$

Wegen $0{,}852 \cdot 500\,€ + 0{,}148 \cdot 300\,€ = 470{,}4\,€ > 460\,€$ kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

1.4 In dem Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben. — 5 — K4 A2, K6
Diese Wahrscheinlichkeit soll mindestens 0,6 betragen, wobei gleichzeitig die Anzahl der Urlaubstage maximiert werden soll.
Aus dem Schaubild entnimmt man, dass man maximal sechs Urlaubstage buchen darf.

1.5.1 Der Hotelier kann den Erwartungswert μ für eine Bernoulli-Kette mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ p = 0,2 und der Anzahl n = 310 an Januartagen bilden: $\mu = n \cdot p = 62$. — 2 — K6 A1

1.5.2 X: Anzahl der Sturmtage — 3 — K5 A1

$$P(X < 50) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{310-i} \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}0352$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,5 % rentiert sich das Angebot nicht.

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte		
1.6	Standardabweichung $\sigma = \sqrt{310 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 7{,}04$. Damit ist die Zufallsvariable X näherungsweise normalverteilt.	2	K5	A1
1.7	95 % Konfidenzintervall bezüglich h = $\frac{96}{120} = 0{,}8$ $[0{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}};\ 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}] \approx [0{,}728;\ 0{,}872]$	4	K1 K5	A3 A2
		30		

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

Punkte

Analysis

1 Die Funktion f ist gegeben durch | 3 | K5 A1

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.

2 Erläutern Sie eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung | 3 | K6 A2, K2 A2

$$x^3 = x + 1.$$

3 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in $P(-2 \mid 4)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(4 \mid 0)$. | 4 | K1 A2

Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms:

- $p(0) = 0$
- $p''(-2) = 0$
- $p(-2) = 4$
- $p(4) = 0$

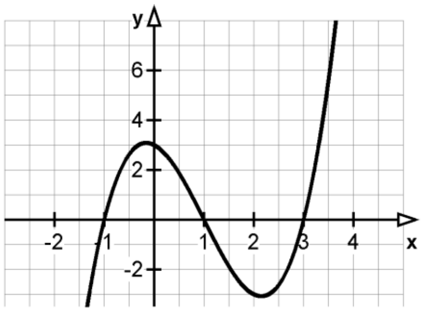
Begründen Sie, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.

4 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion g. | 5 | K4 A2, K1 A3
Ordnen Sie die folgenden Integralwerte der Größe nach. Begründen Sie.

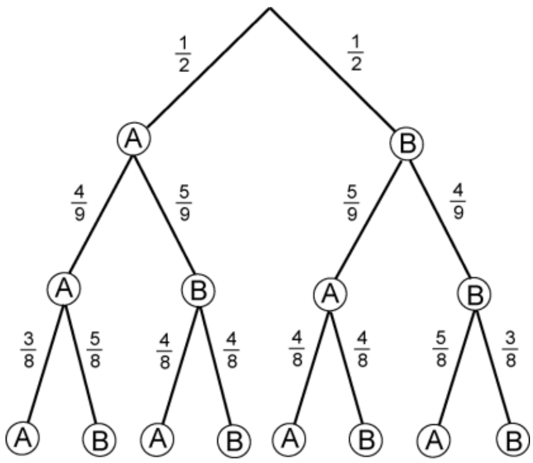
(A) $\int_0^3 g(x)\,dx$

(B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$



Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

		Punkte	
Matrizen			
5	Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS, Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS.	4	K3 A1
	Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.		K4 A2
	Begründen Sie, dass in der Hauptdiagonale der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.		K1 A1
6	A, B und X sind 3x3-Matrizen. Bei welchen der folgenden Terme kann X ausgeklammert werden? (1) $A \cdot X + X$ (2) $X \cdot A + B \cdot X$	4	K5 A1
	In manchen Fällen kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix A an.		K2 A2
Stochastik			
7.1	Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment, das zum nebenstehenden Baumdiagramm passt. 	2	K4 A1 K6 A2
7.2	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Mindestens einmal tritt A ein.“	2	K5 A2
8	Eine ideale Münze wird 100 Mal geworfen. Begründen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist:	3	K5 A2 K1 A3
	Die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf ist kleiner als die für genau 98 Mal Kopf.		
		30	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

Kompetenzraster

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Summen
A1	5. 1			7.1 1	1. 3 6. 2		**7**
A2	3. 4	2. 1 6. 2		4. 2 5. 3	7.2 2 8. 2	2. 2 7.1 1	**19**
A3	4. 3 8. 1						**4**
Summen	**9**	**3**		**6**	**9**	**3**	**30**

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

1 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. 3 K5 A1

$f'(x) = \cos(2x)$

$f(0) = -1;\ f'(0) = 1$

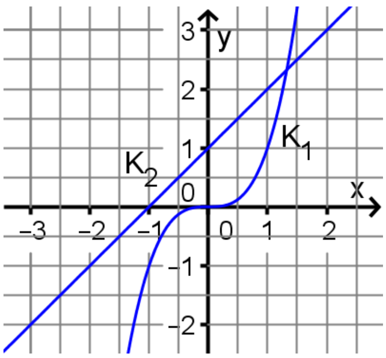
Gleichung der Tangente in P(0|–1): $y = x - 1$

2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Schnittstelle der Graphen der beiden Funktionen g_1 und g_2 mit 3 K6 A2, K2 A2

$g_1(x) = x^3$ und $g_2(x) = x + 1$

bestimmt werden. Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h. die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.

Skizze



3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text: 4 K1 A2

- $p(0) = 0$ K verläuft durch den Ursprung.
- $p''(-2) = 0$ K hat bei $x = -2$ eine Wendestelle.
- $p(-2) = 4$ K verläuft durch den Punkt $P(-2\,|\,4)$.

Die Information über den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse hat Tina falsch interpretiert. Ihre vierte Bedingung würde gelten, wenn auch das Schaubild der Polynomfunktion die x-Achse im Punkt Q schneiden würde.

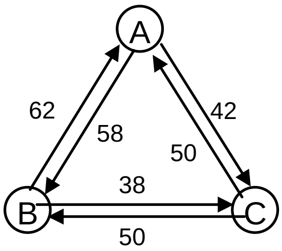
4 (A) < (C) < (B) 5 K4 A2, K1 A3

Im Intervall [0;3] schließt das Schaubild mit der x-Achse zwei Teilflächen ein, von denen diejenige unterhalb der x-Achse größer ist als die oberhalb der x-Achse. Daher ist (A) negativ.

Im Intervall [–1;1] schließt das Schaubild mit der x-Achse eine Fläche ein, die ganz oberhalb der x-Achse liegt. Daher ist (B) positiv. Der Flächeninhalt ist etwa 4 FE.

Im Intervall [–1;3,5] schließt das Schaubild mit der x-Achse drei Teilflächen ein. Zwei der Flächen sind gleich groß: eine liegt oberhalb, die andere unterhalb der x-Achse. Die dritte Teilfläche im Intervall [3;3,5] liegt oberhalb der x-Achse mit einem Flächeninhalt von ca. 1,5 FE. (C) liegt somit zwischen (A) und (B).

LÖSUNGSVORSCHLAG

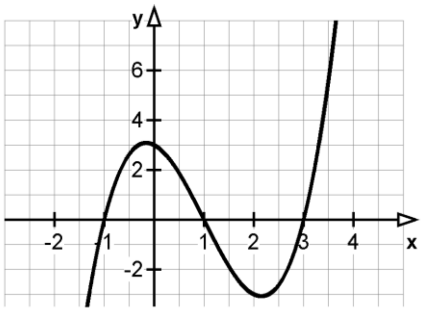
		Punkte		
	Matrizen			
5		3	K4	A2
	In der Hauptdiagonale der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schickt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.	1	K1	A1
6	Bei (1) kann X ausgeklammert werden: $A \cdot X + X = (A + E) \cdot X$	1	K5	A1
	Bei (2) kann X nicht ausgeklammert werden, da X von links mit A und von rechts mit B multipliziert wird.	1	K5	A1
	Wenn $A + 2E$ nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen. Eine mögliche Matrix dafür ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	2	K2	A2
	Stochastik			
7.1	In einer Urne sind 5 Kugeln mit der Aufschrift A und 5 Kugeln mit der Aufschrift B. Aus der Urne wird 3 Mal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen.	2	K4 K6	A1 A2
7.2	P(„Mindestens einmal tritt A ein“) = $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$	2	K5	A2
8	X: Anzahl von Kopf $P(X = 1) = 100 \cdot 0{,}5^{100}$; $P(X = 98) = \binom{100}{98} \cdot 0{,}5^{100}$ $\binom{100}{98} = \frac{100 \cdot 99}{2} > 100$, also ist $P(X = 1) < P(X = 98)$, die Aussage ist also wahr.	2 1	K5 K1	A2 A3
		30		

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

Punkte

Analysis

		Punkte		
1	Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.	3	K5	A1
2	Erläutern Sie eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung $x^3 = x + 1$.	3	K6 K2	A2 A2
3	Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in P(–2 | 4) einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in Q(4 | 0). Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms: • $p(0) = 0$ • $p''(-2) = 0$ • $p(-2) = 4$ • $p(4) = 0$ Begründen Sie, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.	4	K1	A2
4	Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion g. Ordnen Sie die folgenden Integralwerte der Größe nach. Begründen Sie. (A) $\int_0^3 g(x)\,dx$ (B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$ (C) $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$	5	K4 K1	A2 A3



Punkte

Vektorgeometrie

5 Gegeben ist die Ebene E durch

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ u, v \in \mathbb{R}.$$

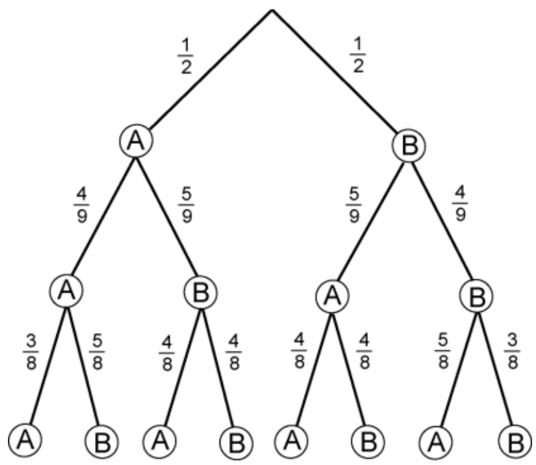
Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, 4 K4 A2

(A) die in der Ebene E liegt,
(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

6 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt. 4 K3 A2, K4 A2

Stochastik

7.1 Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment, das zum nebenstehenden Baumdiagramm passt. 2 K4 A1, K6 A2



7.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Mindestens einmal tritt A ein." 2 K5 A2

8 Eine ideale Münze wird 100 Mal geworfen. Begründen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist: 3 K5 A2, K1 A3

Die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf ist kleiner als die für genau 98 Mal Kopf.

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

Kompetenzraster

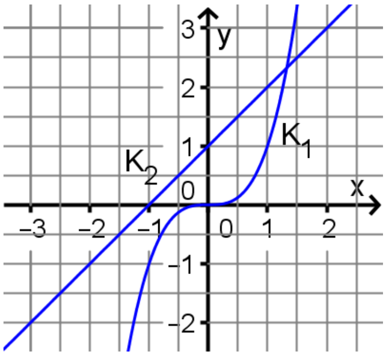
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Summen
A1				7.1 1	1. 3		**4**
A2	3. 4	2. 1	6. 1	4. 2 5. 4 6. 3	7.2 2 8. 2	2. 2 7.1 1	**22**
A3	4. 3 8. 1						**4**
Summen	**8**	**1**	**1**	**10**	**7**	**3**	**30**

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

1	$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \cos(2x)$ $f(0) = -1;\ f'(0) = 1$ Gleichung der Tangente in P(0|–1): $y = x - 1$	3	K5 A1
2	Die Lösung kann z. B. graphisch als Schnittstelle der Graphen der beiden Funktionen g_1 und g_2 mit $g_1(x) = x^3$ und $g_2(x) = x + 1$ bestimmt werden. Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h. die Gleichung hat nur eine Lösung. Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung. Skizze 	3	K6 A2 K2 A2
3	Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text: • $p(0) = 0$ — K verläuft durch den Ursprung. • $p''(-2) = 0$ — K hat bei $x = -2$ eine Wendestelle. • $p(-2) = 4$ — K verläuft durch den Punkt $P(-2 \mid 4)$. Die Information über den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse hat Tina falsch interpretiert. Ihre vierte Bedingung würde gelten, wenn auch K die x-Achse im Punkt Q schneiden würde.	4	K1 A2
4	(A) < (C) < (B) Im Intervall [0;3] schließt das Schaubild mit der x-Achse zwei Teilflächen ein, von denen diejenige unterhalb der x-Achse größer ist als die oberhalb der x-Achse. Daher ist (A) negativ. Im Intervall [–1;1] schließt das Schaubild mit der x-Achse eine Fläche ein, die ganz oberhalb der x-Achse liegt. Daher ist (B) positiv. Der Flächeninhalt ist etwa 4 FE. Im Intervall [–1;3,5] schließt das Schaubild mit der x-Achse drei Teilflächen ein. Zwei der Flächen sind gleich groß: eine liegt oberhalb, die andere unterhalb der x-Achse. Die dritte Teilfläche im Intervall [3;3,5] liegt oberhalb der x-Achse mit einem Flächeninhalt von ca. 1,5 FE. (C) liegt somit zwischen (A) und (B)..	5	K4 A2 K1 A3

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

LÖSUNGSVORSCHLAG

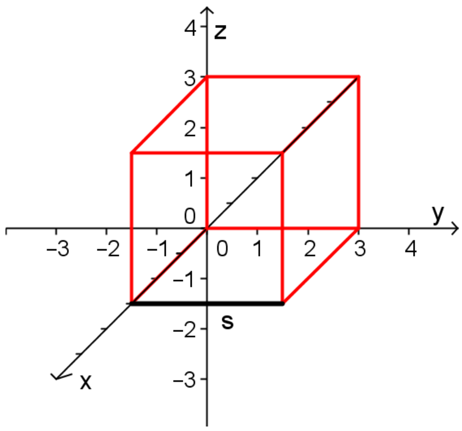
Punkte

Vektorgeometrie

5 (A): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $u \in \mathbb{R}$. — 4 — K4 A2

(B): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $v \in \mathbb{R}$.

6 — 4 — K3 A2, K4 A2



Beispiel:
Die Kante s liegt auf der Geraden mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Stochastik

7.1 In einer Urne sind 5 Kugeln mit der Aufschrift A und 5 Kugeln mit der Aufschrift B. Aus der Urne wird 3 Mal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen. — 2 — K4 A1, K6 A2

7.2 P(„Mindestens einmal tritt A ein“) = $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ — 2 — K5 A2

8 X: Anzahl von Kopf — 2 — K5 A2

$P(X = 1) = 100 \cdot 0{,}5^{100}$; $P(X = 98) = \binom{100}{98} \cdot 0{,}5^{100}$ — 1 — K1 A3

$\binom{100}{98} = \frac{100 \cdot 99}{2} > 100$,

also ist $P(X = 1) < P(X = 98)$, die Aussage ist also wahr.

30

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 2 (mit Hilfsmittel)	Analysis

Punkte

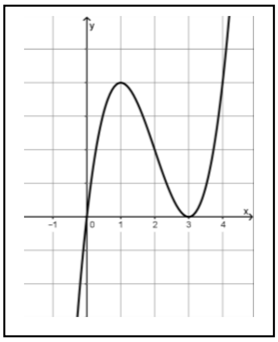
1 Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -2x^2(x-3);\ x \in IR.$$

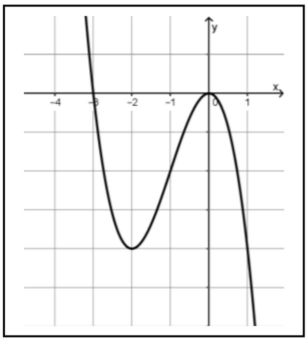
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild K. 6
Untersuchen Sie für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann. K4 A1
Skalieren Sie auf dem beiliegenden Arbeitsblatt bei derjenigen Abbildung, die K zeigt, die y-Achse. K1 A1

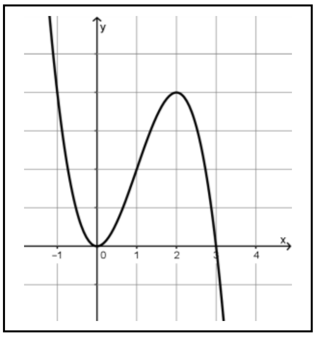
A



B



C



1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. 5 K5 A2

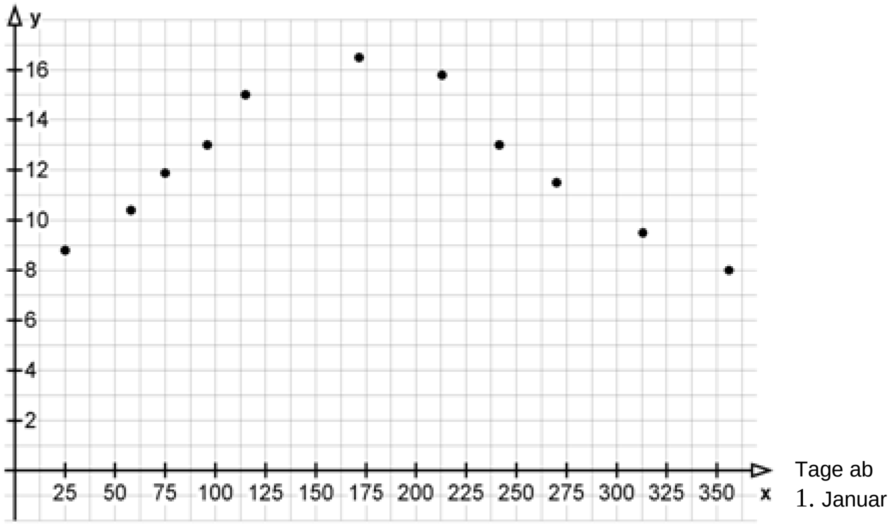
1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. 5 K2 A2
Ermitteln Sie einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichnen Sie in der Abbildung aus 1.1 auf dem Arbeitsblatt die von Ihnen gewählte Fläche.

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. 4 K1 A2
Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. K4 A2

1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von + nach –.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall [1; 2].

Punkte

2 Im Verlauf eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und -untergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21.6. mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21.12. mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden.
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an. 6 K3 A1 K5 A2

2.2 Tina und Tom haben mithilfe der Regression jeweils einen Funktionsterm bestimmt.
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression (mit dem Bestimmtheitsmaß r^2=0,8745), Tom durch eine Regression 4. Grades (mit dem Bestimmtheitsmaß r^2=0,9784) angenähert.
Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort. 4 K1 A2

30

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 2 (mit Hilfsmittel)	Analysis

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.1 Am Funktionsterm von f kann man erkennen: 2 K4 A1

einfache Nullstelle $x_1 = 3$, doppelte Nullstelle $x_{2,3} = 0$

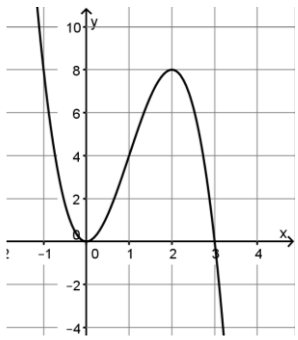
Abb. A zeigt eine einfache Nullstelle bei $x = 0$, stellt also nicht K dar. 3

Abb. B zeigt eine Nullstelle bei $x = -3$, stellt also nicht K dar.

Abb. C kann K zeigen, da alle o.g. Eigenschaften gegeben sind.

K1 A1

Mit dieser Skalierung zeigt Abb. C die Kurve K. 1



1.2 5 K5 A2

$$A = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3 = -\frac{1}{2}\cdot 81 + 2\cdot 27 = 13{,}5$$

Der Flächeninhalt beträgt 13,5 FE.

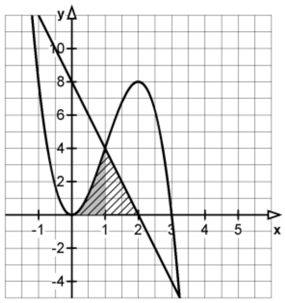
1.3 $h(x) = -4x + 8$ 5 K2 A2

Nullstelle von h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Schnittstelle von Gerade und Parabel: $x = 1$ (abgelesen)

Teilfläche 1:

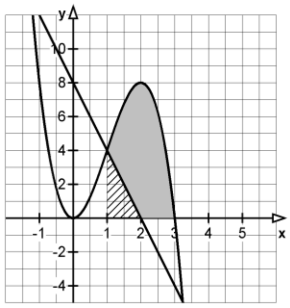
(Summe aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [0;1] und dem Flächeninhalt des Dreiecks):



$$A = \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}(2-1)\cdot 4$$

(oder Teilfläche 2:

(z. B. Differenz aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [1;3] und dem Flächeninhalt des Dreiecks):



$$A = \int_1^3 f(x)dx - \frac{1}{2}(2-1)\cdot 4 \quad)$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
1.4	1. Falsch, da Linkskrümmung an der Stelle x = 3, also $g''(3) > 0$ 2. Wahr, da Hochpunkt bei x = 1 3. Falsch, da Wendepunkt mit Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung 4. Wahr, da $g'(3) = 0$ und durchschnittliche Änderungsrate in [1; 2] negativ	4	K1 A2 K4 A2
2.1	x: Tage ab 1. Januar s(x): Astronomische Sonnenscheindauer in Stunden $s(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ 21.6 : x = 172 H(172|16,5) 21.12: x = 355 T(355|8) Gleichung der Schwingungsachse: $d = \frac{16,5+8}{2} = 12,25$ Amplitude: $a = 16,5 - 12,25 = 4,25$ Periode (ein Jahr mit 365 Tagen): p = 365, $b = \frac{2\pi}{365}$ Verschiebung in x-Richtung: $355 - 365 = -10 \Rightarrow c = \frac{172 + (-10)}{2} = 81$ $s(x) = 4,25 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(x-81)) + 12,25$	6	K3 A1 K5 A2
2.2	Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel keine zwei Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktmenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsmaß r^2=0,8745 erkennen kann. Toms Näherung beschreibt die Punktemenge sehr gut, das Bestimmtheitsmaß liegt sehr nahe an 1. Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich. Toms Näherungsfunktion ist für den Definitionsbereich [0 ; 365] für jedes Jahr geeignet.	4	K1 A2
		30	

		Punkte	
1	Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.		
1.1	Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben.	5	K4 A1 K5 A1
1.2	Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2015 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet.		
1.2.1	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Wetterzustände am 2. April 2015, wenn der Online-Wetterdienst auch noch für den 1. April 2015 voraussagt, dass es mit 20 % Wahrscheinlichkeit sonnig ist.	5	K5 A1 K4 A1
1.2.2	Wie groß müssen die Wahrscheinlichkeiten für einen Sonnentag bzw. für einen trüben Tag am 1. April 2015 sein, damit die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag größer wird?	6	K2 A2 K5 A2
1.3	Es wird angenommen, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände R, S und T am Bodensee nicht ändern. Zeigen Sie, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt.	7	K3 A2 K5 A2 K1 A2
2	Auf einer Mittelmeerinsel gilt für die drei Wetterzustände R, S und T im Juli die Übergangsmatrix $$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$		
2.1	Interpretieren Sie die zweite Spalte dieser Matrix.	2	K6 A2
2.2	Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass auf dieser Insel ungewöhnlich stabile Wetterverhältnisse herrschen.	5	K2 A3 K1 A3
		30	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Matrizen

Kompetenzraster

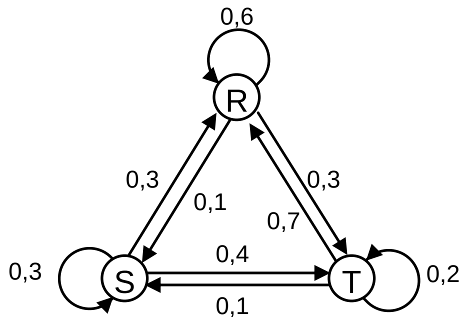
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Summen
A1				1.1 4	1.1 1 1.2.1 5		**10**
A2	1.3 2	1.2.2 3	1.3 1		1.2.2 3 1.3 4		**13**
A3	2.2 3	2.2 2				2.1 2	**7**
Summen	**5**	**5**	**1**	**4**	**13**	**2**	**30**

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Matrizen

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.1 — 5 — K4 A1, K5 A1



1.2 — K4 A1

$$A = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

1.2.1 — 5 — K5 A1

$$\vec{x}_2 = A\cdot\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ 0{,}14 \\ 0{,}27 \end{pmatrix}$$

Am 2. April wird es mit 59 % Wahrscheinlichkeit regnen, mit 14 % Wahrscheinlichkeit wird die Sonne scheinen und mit 27 % Wahrscheinlichkeit wird es trübe sein.

1.2.2 — 6 — K2 A2

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ a \\ 0{,}7 - a \end{pmatrix} \qquad \vec{y}_2 = A\cdot\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}67 - 0{,}4a \\ 0{,}10 + 0{,}2a \\ 0{,}23 + 0{,}2a \end{pmatrix}$$

WS für einen sonnigen Tag: $0{,}1 + 0{,}2a > a \iff a < 0{,}125$

WS für einen trüben Tag: $0{,}7 - a > 0{,}575$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag muss kleiner sein als 12,5 % und die für trübes Wetter muss größer sein als 57,5 %.

1.3 — 5 — K3 A2, K5 A2

$$A\cdot\vec{x} = \vec{x} \iff (E - A)\cdot\vec{x} = \vec{o}$$

LGS:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}4 & -0{,}3 & -0{,}7 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2{,}08\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}44\,\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte	
	Das LGS hat unendlich viele Lösungen: $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2{,}08 \\ 0{,}44 \\ 1 \end{pmatrix}$ Die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung ist diejenige Lösung, bei der die Komponenten die Summe 1 haben: $3{,}52\,\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \approx 0{,}284$	2	K1 A2
2.1	Die zweite Spalte der Übergangsmatrix sagt aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag nicht ändert. Auf einen Sonnentag folgt mit Sicherheit wieder ein Sonnentag.	2	K6 A2
2.2	$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5(r+t) \\ s \\ 0{,}5(r+t) \end{pmatrix}$ Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag bleibt immer gleich. Wenn die Wahrscheinlichkeit für einen regnerischen Tag genau so groß ist wie für einen trüben Tag, dann bleiben auch diese Wahrscheinlichkeiten unverändert. Wenn sich die Wahrscheinlichkeiten für einen regnerischen Tag und für einen trüben Tag unterscheiden, dann sind sie am Folgetag gleich groß. Deshalb ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände spätestens vom zweiten Tag an nicht mehr. Da es sich aber um Aussagen über Wahrscheinlichkeiten handelt, bedeutet das nicht, dass es keinen Wechsel zwischen den drei Wetterzuständen geben kann.	5	K2 A3 K1 A3
		30	

		Punkte		
1	Gegeben sind die Punkte P(–3|2|9) und Q(2|2|4), die Ebenen E_1 und E_2 sowie die Gerade g durch E_1: $x_1 - x_2 = -10$ und E_2: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-5\\1\\7\end{pmatrix}\right)=0$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$; $t \in$ IR.			
1.1	Zeigen Sie: Der Punkt P liegt nicht auf der Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die durch den Punkt P und die Gerade g festgelegt wird. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E_2 und F.	8	K1 K5 K4	A1 A2 A2
1.2	Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen. Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_1 im Raum.	4	K1 K6	A2 A2
1.3	Zeigen Sie: Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich. Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel.	8	K1 K4	A2 A2
1.4	Ermitteln Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1.	4	K5	A2
1.5	Ein Punkt R erfüllt folgende Bedingungen: • $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind gleich lang. • Der Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ beträgt 60°. • Der Punkt R liegt in der Ebene E_1. Welche Eigenschaft hat das Dreieck PQR? Überprüfen Sie, ob der Punkt R(– 3|7|4) diese Bedingungen erfüllt.	6	K6 K5	A2 A2
		30		

Punkte

	Anforderungsniveau I (7%)	Anforderungsniveau II (93%)	Anforderungsniveau III (0%)
K1	*1.1* *2*	*1.2* *3*	
K2			
K3			
K4		*1.1* *4* *1.3* *1*	
K5		*1.1* *2* *1.3* *7* *1.4* *4* *1.5* *4*	
K6		*1.2* *1* *1.5* *2*	
30	2	28	

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Vektorgeometrie

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.1 Punktprobe: $\begin{pmatrix}-3\\2\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ liefert: $\begin{matrix}t=-\frac{1}{3}\\t=-\frac{3}{4}\\t=-\frac{1}{3}\end{matrix}$ Widerspruch, d.h. P liegt nicht auf g. 2 K1 A1

F: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-3&-&(-2)\\2&-&5\\9&-&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$; $t, u \in$ IR 2 K5 A2

$E_2 \cap F$: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\1\\7\end{pmatrix}\right)=0$ 4 K4 A2

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}3+3t-u\\4+4t-3u\\3+3t-u\end{pmatrix}\right)=0$$

$3 + 3t – u – 3 – 3t + u = 0$

$0 = 0$ wahre Aussage,

d.h. die Ebenen E_2 und F sind identisch.

1.2 $E_1 \cap x_1$-Achse: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$: $x_1 = –10$ $S_1(–10|0|0)$ 3 K1 A2

$E_1 \cap x_2$-Achse: $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$: $x_2 = 10$ $S_2(0|10|0)$

$E_1 \cap x_3$-Achse: $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$: $0 = –10$ falsche Aussage, d.h. E_1 schneidet die x_3-Achse nicht.

Die Ebene E_1 ist parallel zur x_3-Achse. 1 K6 A2

1.3 E_2: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-5\\1\\7\end{pmatrix}\right)=0$ 3 K5 A2

E_2: $x_1 + 5 – (x_3 – 7) = 0$

$x_1 = x_3 –12$ $\qquad$ E_1: $x_1 – x_2 = –10$

$E_1 \cap E_2$: $\qquad x_3 –12 – x_2 = –10$

$x_3 – x_2 = 2$

Die Gleichung ist mehrdeutig lösbar, also schneiden sich E_1 und E_2.

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz B	Teil 3 (mit Hilfsmittel)	Vektorgeometrie

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Schnittgerade: $x_2 = x_1 + 10$ 2 K5 A2

$x_3 = x_1 + 12$

$x_1 = r,\ r \in \mathrm{IR}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ r+10 \\ r+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ r \in \mathrm{IR}$$

Bestimmung des Schnittwinkels:

Normalenvektor von E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 K4 A2

Normalenvektor von E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$, also ist $\beta = 60°$. 2 K5 A2

1.4 Abstand d von Punkt Q zur Ebene E_1: 4 K5 A2

Hesse'sche Normalenform der Ebene E_1: $\frac{x_1 - x_2 + 10}{\sqrt{2}} = 0$

$$d = \left|\frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 - (-10)}{\sqrt{2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

1.5 $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind gleich lang, also ist das Dreieck PQR gleichschenklig. 2 K6 A2

Da der Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ 60° beträgt, ergeben die beiden (gleich großen) Basiswinkel 120°, d. h. alle drei Winkel betragen 60°, damit ist das Dreieck PQR gleichseitig.

Überprüfung, ob der Punkt R(– 3|7|4) die Bedingungen erfüllt: 4 K5 A2

- $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 & - & (-3) \\ 7 & - & 2 \\ 4 & - & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

  $\left|\overrightarrow{PR}\right| = 5\sqrt{2}$

  $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 5\sqrt{2}$, d.h. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind gleich lang.
- Es soll gelten:

  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PR}\right| \cdot \cos(60°)$

  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

  $25 = 25$ Dies ist eine wahre Aussage, also beträgt der Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ 60°.
- Der Punkt R liegt in der Ebene E_1, wenn gilt: $-3 - 7 = -10$
  Dies ist eine wahre Aussage, also liegt der Punkt R in der Ebene E_1.

30

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz C	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

Punkte

Analysis

1 Untersuchen Sie das Schaubild von f mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ auf waagerechte Tangenten. 3 K5 A1

2 Julian hat die Gleichung $x \cdot \sin(x) = x$ für $x \in [-1; 2]$ gelöst: 3 K6 A2

$$x \sin(x) = x \quad | : x$$

$$\sin(x) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Überprüfen Sie Julians Lösungsvorschlag.

3 Die Berechnung einer Fläche führt auf folgenden Ausdruck: 5 K4 A2, K5 A1

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^2)dx$$

Veranschaulichen Sie die Lage dieser Fläche im Koordinatensystem.
Berechnen Sie den Flächeninhalt.

4 Gegeben ist die Funktion g mit 4 K1 A3

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + x - 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

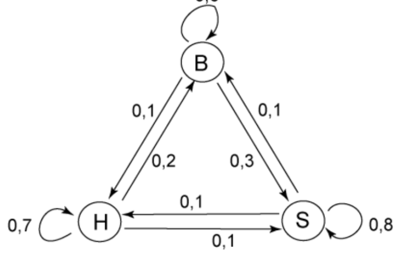
Beschreiben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.

Matrizen

5 Der Besitzer eines Fastfoodrestaurants fand heraus, dass das Konsumverhalten seiner Stammgäste sich prinzipiell in drei Gruppen einteilen lässt: 5 K6 A1

H: Gäste, die das Menü „Hamburger“ wählen.
S: Gäste, die das Menü „Salat“ wählen.
B: Gäste, die das Menü „Baguette“ wählen.

Der Besitzer stellte zudem fest, dass sich die Gesamtzahl seiner Stammgäste im Laufe der Zeit nicht verändert, wohl aber deren tägliche Menüauswahl.
Der dargestellte Graph stellt die beobachteten Veränderungen bei der Menüauswahl der Gäste von einem Tag zum nächsten Tag dar.



$$M = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0{,}8 & 0{,}3 \\ \square & \square & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,2 in der Graphik.
Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix M an.

Punkte

6 Für die 3x3-Matrizen A, B, C und X sind die beiden Matrizengleichungen (1) und (2) gegeben. E ist die zugehörige Einheitsmatrix. 4 K6 A1 K1 A2

(1) $(A+B)\cdot X = E$

(2) $(A+B)\cdot X = C$

Thorsten löst beide Gleichungen nach X auf:

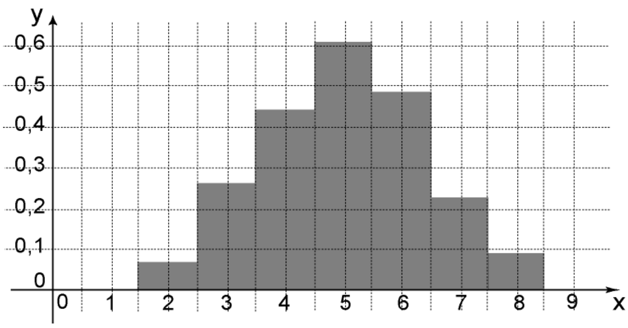
(1) $X = (A+B)^{-1}$

(2) $X = (A^{-1}+B^{-1})\cdot C$

Erläutern Sie die Lösungsschritte zu Gleichung (1).
Nehmen Sie Stellung zur Lösung der Gleichung (2).

Stochastik

7 Könnte das dargestellte Schaubild zu einer Binomialverteilung gehören? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 K4 A2 K1 A1



8 In einer Urne sind fünf schwarze, vier rote und eine weiße Kugel. Daraus werden fünf Kugeln mit einem Griff gezogen. 4 K2 A2 K6 A3
A ist das Ereignis: „Mindestens zwei rote Kugeln werden gezogen."
Welche(s) der folgenden Ereignisse beschreibt/ beschreiben das Gegenereignis von A?

E: Höchstens zwei Kugeln sind rot.
F: Mindestens vier Kugeln sind schwarz oder weiß.
G: Höchstens drei Kugeln sind nicht rot.
H: Weniger als zwei Kugeln sind rot.
I: Genau eine Kugel ist rot.

30

Punkte

Kompetenzraster

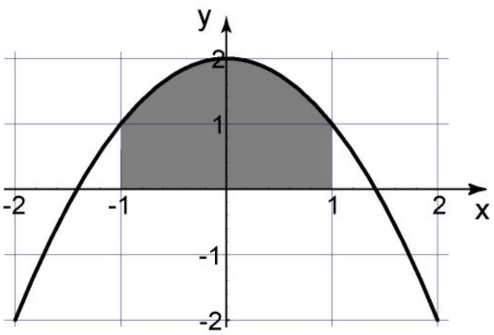
→ Kompetenzen → ↓ Anforderungsniveaus ↓	K1	K2	K3	K4	K5	K6
A1	7				1,3	5,6
A2	6	8		3,7		2
A3	4					8

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz C	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Matrizen

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

		Punkte		
1	Es gilt: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$ Das Schaubild von f hat also an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ waagrechte Tangenten.	3	K5	A1
2	Julians Lösung ist nicht vollständig, es fehlt die Fallunterscheidung x = 0 und $x \neq 0$. Auf diese Weise geht ihm die Lösung x = 0 verloren.	3	K6	A2
3		3	K4	A2
	Für das Integral ergibt sich: $\int_{-1}^{1}(2-x^2)\,dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$	2	K5	A1
4	Es gilt $g(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$. Dabei wächst g(x) für $x \to -\infty$ exponentiell, während g(x) für $x \to \infty$ asymptotisches Verhalten zeigt.	3	K1	A3
	Asymptote: y = x – 2.	1		

Matrizen

		Punkte		
5	Die Zahl 0,2 gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Gast vom Menü „Hamburger“ am darauffolgenden Tag zum Menü „Baguette“ wechselt.	2	K6	A1
	$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	3	K5	A2
6	Gleichung (1): Thorsten geht davon aus, dass die inverse Matrix $(A+B)^{-1}$ zu A + B existiert. Er multipliziert beide Seiten der Gleichung von links mit dieser Inversen. Da $(A+B)^{-1} \cdot (A+B) = E$ ergibt, folgt die Lösung $X = (A+B)^{-1}$, falls die Multiplikation mit der Einheitsmatrix nicht explizit dargestellt wird.	2	K6 K1	A1 A2

LÖSUNGSVORSCHLAG

		Punkte		
	Gleichung (2): Die Lösung ist im Allgemeinen falsch. Im Allgemeinen ist $(A+B)^{-1}$ ungleich $A^{-1}+B^{-1}$, insbesondere ist dann $A^{-1}+B^{-1}$ nicht die Inverse von A + B.	2		
Stochastik				
7	Wie man aus der Zeichnung ablesen kann, hat die gekennzeichnete Fläche insgesamt einen Inhalt, der größer als 1 ist. Damit kann es sich nicht um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und insbesondere nicht um eine Binomialverteilung handeln.	2	K4 K1	A2 A1
8	Das Gegenereignis von A bedeutet, dass null oder genau eine rote Kugel gezogen werden sollen. Deshalb können E und G (jeweils zwei rote Kugeln sind erlaubt), sowie I (genau eine rote Kugel) nicht das gesuchte Gegenereignis sein. Bei F und H darf man jeweils höchstens eine rote Kugel ziehen, d. h. das sind Formulierungen des Gegenereignisses von A.	4	K2 K6	A2 A3
		30		

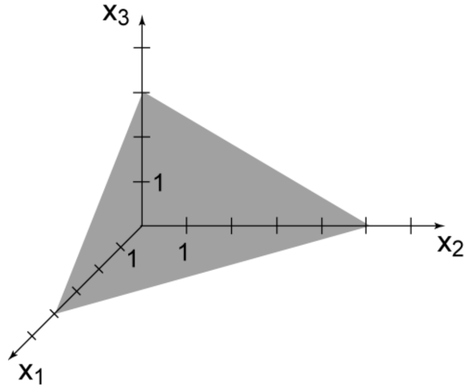
Punkte

Analysis

		Punkte		
1	Untersuchen Sie das Schaubild von f mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ auf waagerechte Tangenten.	3	K5	A1
2	Julian hat die Gleichung $x \cdot \sin(x) = x$ für $x \in [-1; 2]$ gelöst: $x\sin(x) = x \quad \vert : x$; $\sin(x) = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ Überprüfen Sie Julians Lösungsvorschlag.	3	K6	A2
3	Die Berechnung einer Fläche führt auf folgenden Ausdruck: $\int_{-1}^{1} (2 - x^2)dx$ Veranschaulichen Sie die Lage dieser Fläche im Koordinatensystem. Berechnen Sie den Flächeninhalt.	5	K4 K5	A2 A1
4	Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.	4	K1	A3

Vektorgeometrie

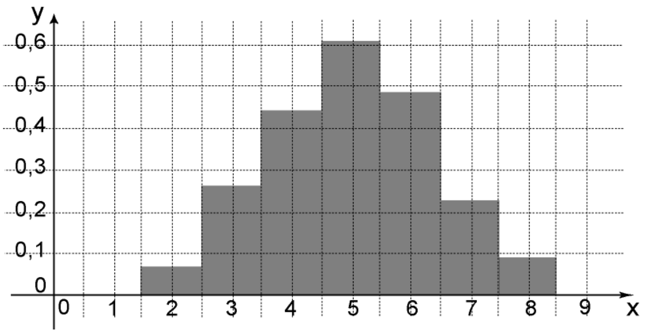
		Punkte		
5	Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die a) parallel zu g durch P (0| 1| –2) verläuft, b) g rechtwinklig schneidet.	4	K1 K5	A1 A2
6	Ermitteln Sie eine Gleichung der dargestellten Ebene. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene.	5	K6	A2



Punkte

Stochastik

7 Könnte das dargestellte Schaubild zu einer Binomialverteilung gehören? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 K4 A2 K1 A1



8 In einer Urne sind fünf schwarze, vier rote und eine weiße Kugel. Daraus werden fünf Kugeln mit einem Griff gezogen. 4 K2 A2 K6 A3
A ist das Ereignis: „Mindestens zwei rote Kugeln werden gezogen.“
Welche(s) der folgenden Ereignisse beschreibt/ beschreiben das Gegenereignis von A?

E: Höchstens zwei Kugeln sind rot.
F: Mindestens vier Kugeln sind schwarz oder weiß.
G: Höchstens drei Kugeln sind nicht rot.
H: Weniger als zwei Kugeln sind rot.
I: Genau eine Kugel ist rot.

30

Punkte

Kompetenzraster

→ Kompetenzen → ↓ Anforderungsniveaus ↓	K1	K2	K3	K4	K5	K6
A1	5,7				1,3	
A2		8		3,7	5	2,6
A3	4					8

Musteraufgaben	Berufliches Gymnasium	
	Mathematik	
Aufgabensatz C	Teil 1 (ohne Hilfsmittel)	Variante mit Vektoren

LÖSUNGSVORSCHLAG

Punkte

Analysis

1 Es gilt: K5 A1

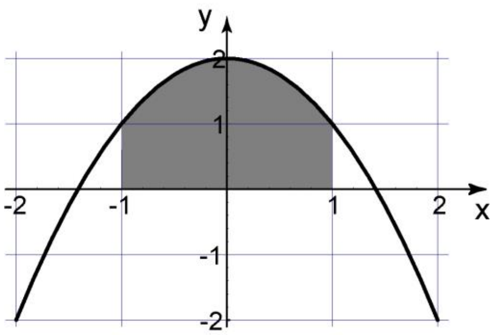
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ 3

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

Das Schaubild von f hat also an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ waagrechte Tangenten.

2 Julians Lösung ist nicht vollständig, es fehlt die Fallunterscheidung x = 0 und x ≠ 0. Auf diese Weise geht ihm die Lösung x = 0 verloren. 3 K6 A2

3 3 K4 A2



Für das Integral ergibt sich: 2 K5 A1

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$$

4 Es gilt $g(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$. Dabei wächst g(x) für $x \to -\infty$ exponentiell, während g(x) für $x \to \infty$ asymptotisches Verhalten zeigt. 3 K1 A3

Asymptote: y = x – 2. 1

Vektorgeometrie

5 a) Mit dem Richtungsvektor von g und dem angegebenen Punkt erhält man: 2 K1 A1 K5 A2

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

b) Mit einem orthogonalen Richtungsvektor und dem gleichen Stützvektor wie bei g erhält man: 2

$$k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Nr.	Lösung	Punkte		
6	Die Ebene verläuft durch die Punkte A(4|0|0), B(0|5|0) und C(0|0|3). Damit ergibt sich: $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}.$	2	K6 K4	A2 A1
	Eine Möglichkeit der Abstandsbestimmung wäre: Zunächst bestimmt man einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E. Dann stellt man die Gleichung der Gerade g mit dem Ursprung O als Stützpunkt und $\vec{n}$ als Richtungsvektor auf. Man berechnet den Schnittpunkt S von g und E und bestimmt den Abstand $\overline{OS}$. Damit hat man den gesuchten Abstand der Ebene E vom Ursprung.	3		
	Stochastik			
7	Wie man aus der Zeichnung ablesen kann, hat die gekennzeichnete Fläche insgesamt einen Inhalt, der größer als 1 ist. Damit kann es sich nicht um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und insbesondere nicht um eine Binomialverteilung handeln.	2	K4 K1	A2 A1
8	Das Gegenereignis von A bedeutet, dass null oder genau eine rote Kugel gezogen werden sollen. Deshalb können E und G (jeweils zwei rote Kugeln sind erlaubt), sowie I (genau eine rote Kugel) nicht das gesuchte Gegenereignis sein. Bei F und H darf man jeweils höchstens eine rote Kugel ziehen, d. h. das sind Formulierungen des Gegenereignisses von A.	4	K2 K6	A2 A3
		30		