MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 1 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	**AUFGABEN FÜR DAS FACH**
	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Arbeitszeit	270 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Schüler genau dann, wenn er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat.
Stoffgebiet	**Teil 1:** Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben) — S. 2 - 5 **Teil 2:** Analysis (1 Aufgabe) — S. 6 - 7 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 8 - 10 **Teil 3:** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 11 - 12 **Teil 4:** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) — S. 13 Lineare Algebra: Matrizen (1 Aufgabe) — S. 14
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrkraft das unterrichtete Wahlgebiet aus. Es sind alle 3 vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. (Pflichtteile: Analysis und Stochastik) In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Aus Teil 3 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. In Teil 4 wählt die Fachlehrkraft - je nach unterrichtetem Wahlgebiet - eine Aufgabe aus. Die vorgelegte Aufgabe ist zu bearbeiten. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

Punkte

1 Analysis

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral 3

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

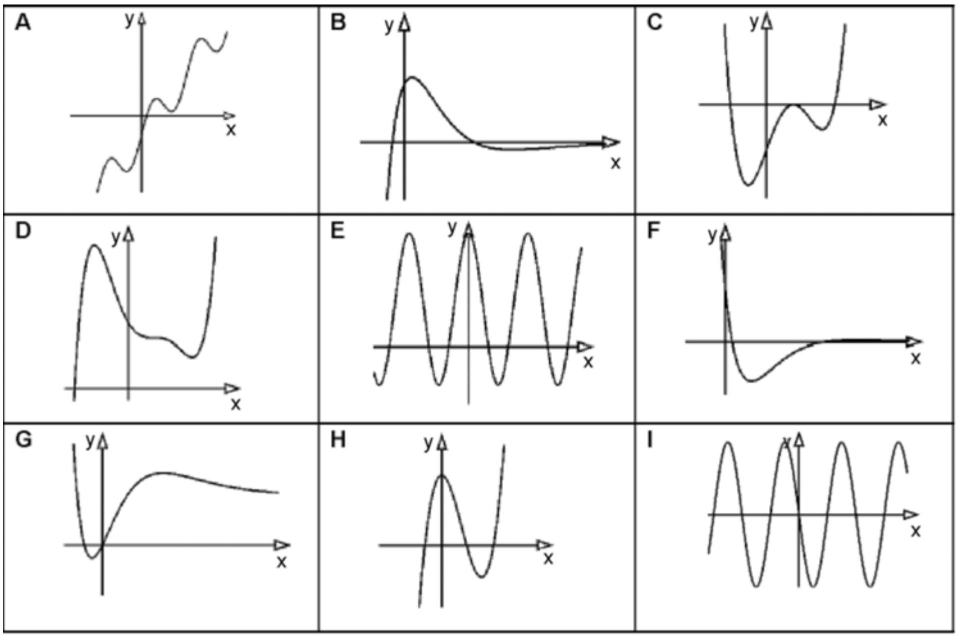
(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in IR$. 4

Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung cos(2x) = – 1.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. 5
Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu:



16

Punkte

2 Stochastik

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“ Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten. 2

2.3 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 3

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

7

Punkte

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

3.1 Gegeben ist die Gerade 4

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.
Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

3.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems 3

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\quad .$$

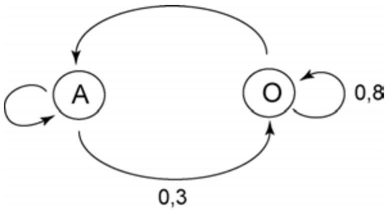
7

Punkte

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, EG, SGG, WG)

4.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 4

Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ 0{,}3 & \ldots \end{pmatrix}$ an.

Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

4.2 Gegeben ist die Matrix 3

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;
E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

7

Punkte

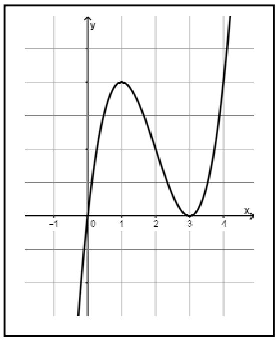
1 Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -2x^2(x-3);\ x \in \mathbb{R}.$$

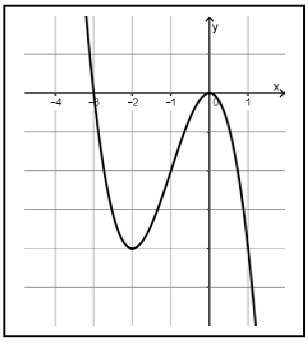
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild K. Untersuchen Sie für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann. Skalieren Sie auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (Seite 7) bei derjenigen Abbildung, die K zeigt, die y-Achse. 6

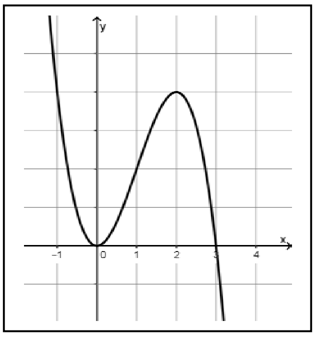
A



B



C



1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. 5

1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. Ermitteln Sie einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichnen Sie in der Abbildung aus 1.1 auf dem Arbeitsblatt (Seite 7) die von Ihnen gewählte Fläche. 5

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. 4

1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von + nach –.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall [1; 2].

20

Zu- und Vorname:

Schulnummer	Schülernummer

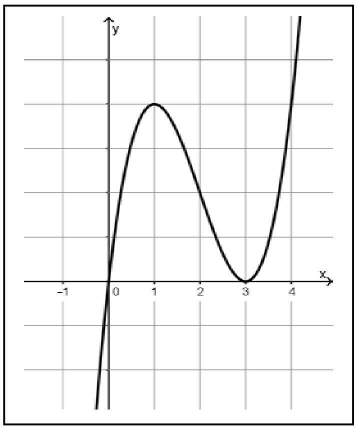
✂--

Musterabitur 1	Berufliches Gymnasium		
	Mathematik		
Arbeitsblatt	Teil 2	Aufgabe 1	Seite 2/2

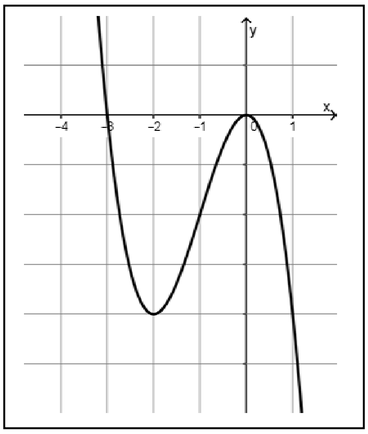
Schulnummer	Schülernummer

Arbeitsblatt:

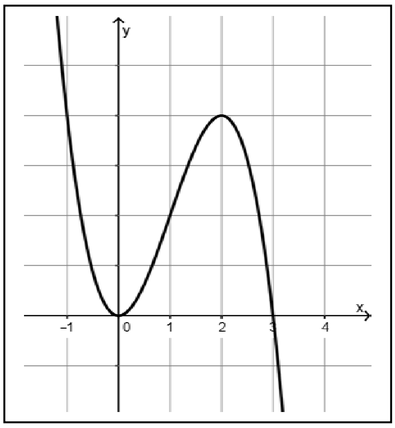
A:



B:

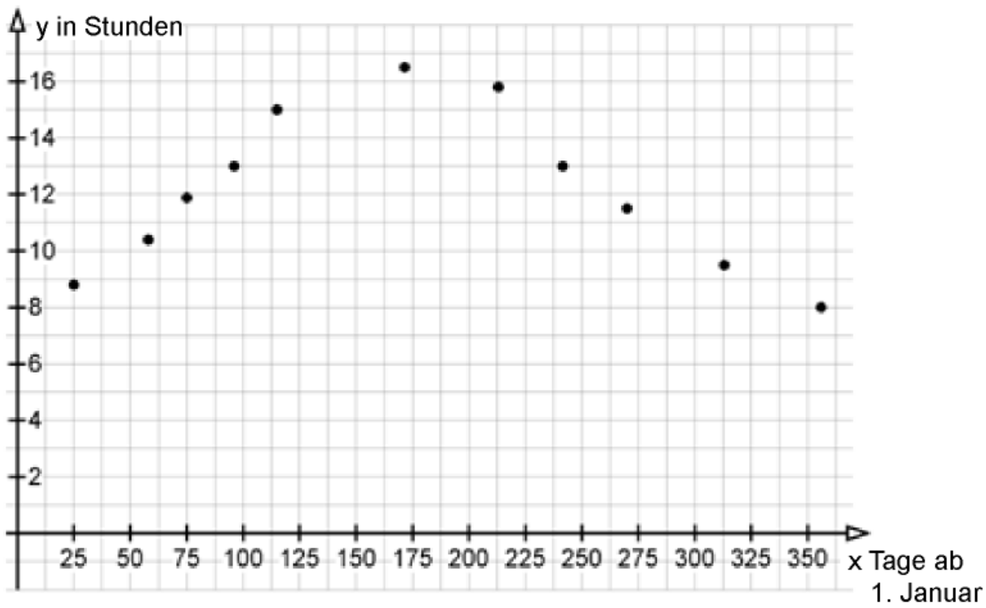


C:



Punkte

2 Im Verlauf eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. 6
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an.

2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. 4
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0,8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0,9784$ angenähert.

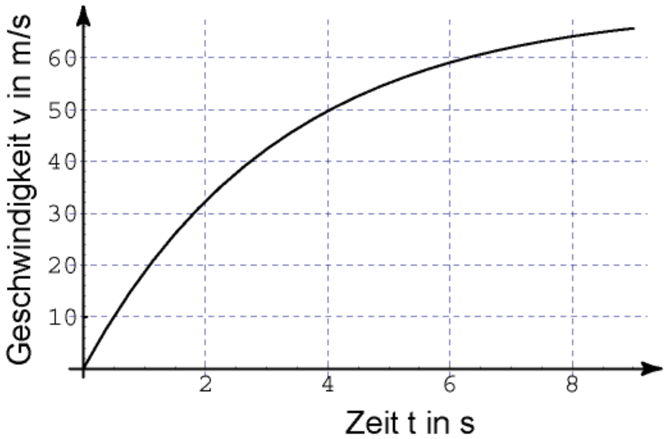
Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

10

Punkte

3 Bei einem Beschleunigungsrennen (Drag Race) versuchen die Teilnehmer mit ihren Rennwagen eine kurvenfreie Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen.

Der Bordcomputer des Fahrzeuges eines Teilnehmers nahm den in der Abbildung dargestellten Geschwindigkeitsverlauf auf.



Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich durch die Funktion v mit

$$v(t) = -70e^{-0{,}313 \cdot t} + 70\ ;\ \ 0 \le t \le 8{,}75$$

modellieren.
Verwenden Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben dieses Modell.

3.1 Nach wieviel Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ \text{km/h}$ erreicht? 4

3.2 Nach 8,75 Sekunden fährt das Fahrzeug durch das Ziel. 6

Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs.
Welche Länge hat die Rennstrecke?

10

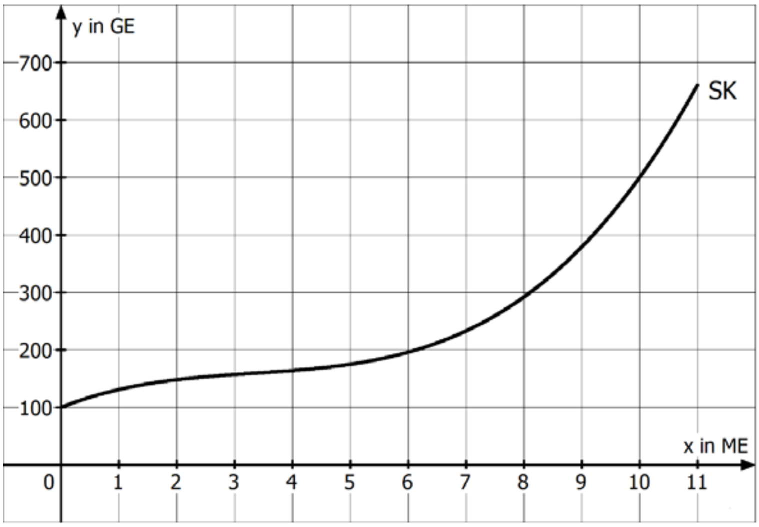
Punkte

4 Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10\,x^2 + 40\,x + 100\,; \quad x \in [0;\,11]$$

beschrieben. Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und K(x) die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt 50 GE. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge und der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.

Die Grafik zeigt das Schaubild SK der Funktion K.



4.1 Ermitteln Sie die Funktionsterme der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G. 4

Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

4.2 Von G sind die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = 10$ bekannt. 4
Skizzieren Sie das Schaubild von G für $x \in [0;\,11]$.

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.
Bestimmen Sie die Gewinnzone.

4.3 Die Unternehmensleitung möchte wissen, für welche Produktionsmenge die Kosten am geringsten ansteigen. Berechnen Sie diese Produktionsmenge. 2

10

Punkte

1 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: 3

A: Von drei Januartagen ist genau ein Tag ein Sturmtag.

B: Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.

1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von 100 €. 4

Ein Gast erhält die Rückerstattung von 100 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt?

1.3 Der Hotelier plant, an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.

1.3.1 Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann. 2

1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert? 2

1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gästen sind 96 zufrieden. Bestimmen Sie ein 95 % Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste. 4

15

.

Punkte

2 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.
Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 €. Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung vor 100 €.

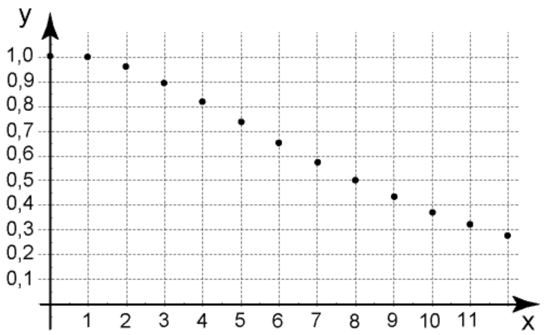
2.1 Anton bucht dieses Angebot. 5
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

A: Anton erlebt keinen Sturmtag.
B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.
C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage.

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will. 5

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“ 5

Im nachfolgenden Schaubild liegen die dargestellten Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$.



Interpretieren Sie das Schaubild und beantworten Sie Antons Frage.

15

Punkte

Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

1 Gegeben sind die Punkte A(2|0|1), B(–1|2|1), C(1|5|4) und D(3|0|5).

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 3

1.2 Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte einer Pyramide. Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem. 4

Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.

1.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. 8

Geben Sie die Koordinatenform von E an.

Prüfen Sie, ob der Punkt $P'(-5{,}5\,|\,-8\,|\,14)$ der Spiegelpunkt von $P(6{,}5\,|\,10\,|\,-12)$ bezüglich der Ebene E ist.

15

Punkte

Lineare Algebra: Matrizen (AG, BTG, EG, SGG, WG)

1.1 Drei Energieversorger A, B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 2800 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher den Energieversorger zu wechseln. 4

Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C.
Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C.
Von C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B.

Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger. Im Jahr 2014 sind 1000 Haushalte bei A und 1000 bei B, die übrigen bei C.

Geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2015 beliefert werden.

1.2 In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

von / zu	A	B	D
A	0,3	0,2	u
B	0,5	0,6	v
D	0,2	0,2	w

1.2.1 Angenommen, u hat den Wert 0,1. Welche Werte für v und w sind dann möglich? 4

Nehmen Sie Stellung zur Behauptung: Die Kunden von B zeigen mehr Kundentreue als die von A.

1.2.2 Bestimmen Sie u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie 1 : 3 : 1 verhalten. 7

15