Gebrochenrationale Funktionen

Definition

Eine ***gebrochenrationale Funktion f*** ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen (Polynomfunktionen) g und h:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+....+b_1x+b_0} \qquad \text{z.B.} \qquad f(x)=\frac{x^3-5x^2+2x-1}{3x^2-4x+7}$$

Dabei bezeichnet n den Zählergrad und m den Nennergrad.

Stellen, an denen eine Funktion f nicht definiert ist, heißen ***Definitionslücken***.

Eine Stelle x_0 (≙ Definitionslücke), an der das Schaubild einer Funktion f sich einer senkrechten Geraden annähert, heißt „Unendlichkeitsstelle“ oder ***Polstelle***. Diese Grenzgerade heißt ***senkrechte Asymptote***.

Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen

Aufgabe 1

a) Zeichne die Schaubilder Kf folgender Funktionen.

Lies die Definitionslücken und das Verhalten an den Definitionslücken ab und gib die Gleichung der Asymptoten an.

b) Berechne die Nullstellen der Zähler- und Nennerfunktion und vergleiche diese mit den Nullstellen von Kf und den Definitionslücken der Funktion f.

c) Formuliere einen Merksatz zu den obigen Erkenntnissen.

$$f_1(x)=\frac{x+1}{x-2}; \qquad f_2(x)=\frac{x^3}{x^2-1}; \qquad f_3(x)=\frac{3-x}{x^2-2x+1}; \qquad f_4(x)=\frac{x^2+2}{x^3-6x^2+9x}$$

Aufgabe 2

Ergänze folgende Sätze:

a) Die Nullstellen von f sind...

b) Die Definitionslücken von f sind...

c) f hat an der Stelle x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn...

d) f hat an der Stelle x_0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn...

Aufgabe 3

Betrachte das Schaubild der Funktion $f_5(x)=\frac{2x^2-2x-12}{3x+6}$.

Faktorisiere Zähler und Nenner und erläutere, warum das Schaubild an der Stelle $x=-2$ weder eine senkrechte Asymptote noch eine Nullstelle besitzt.

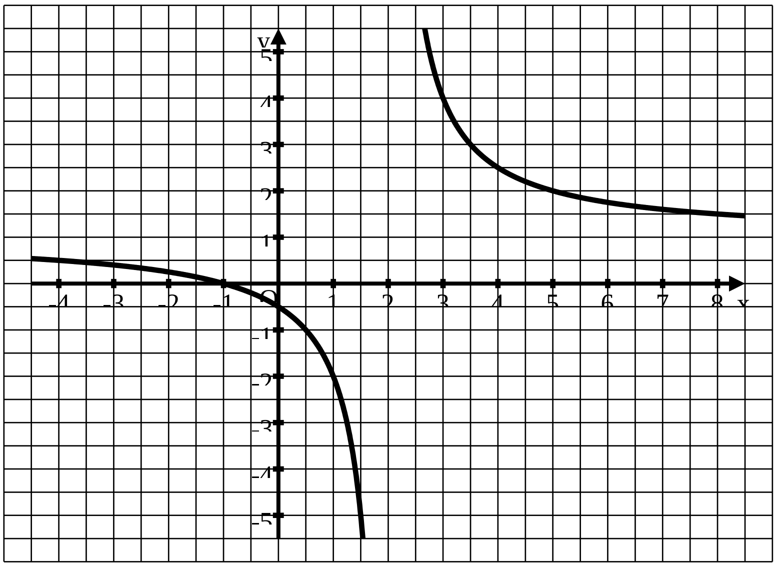
Erläutere, ob und wenn ja, wo der Unterschied zur Funktion $g(x)=\frac{2x-6}{3}$ liegt.

Ergänze folgenden Satz: Eine hebbare Definitionslücke x_0 von f liegt vor, wenn …

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:

$f_1(x) = \frac{x+1}{x-2}$:



Definitionslücke: $x = 2$

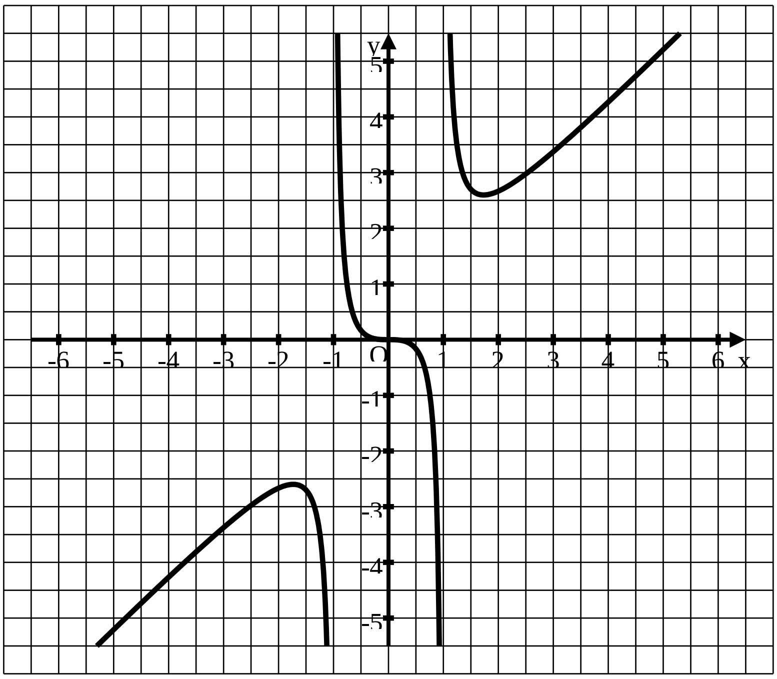
Verhalten an der Definitionslücke: für $x \to 2$ und $x < 2$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 2$ und $x > 2$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 2$, waagrechte Asymptote: $y = 1$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = -1$ (entspricht Nullstelle von K_f),

Nullstelle der Nennerfunktion: $x = 2$ (entspricht Definitionslücke)

$f_2(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$:



Definitionslücken: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

Verhalten an den Definitionslücken:

$x_1 = -1$: für $x \to -1$ und $x < -1$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to -1$ und $x > -1$ gilt: $f(x) \to \infty$

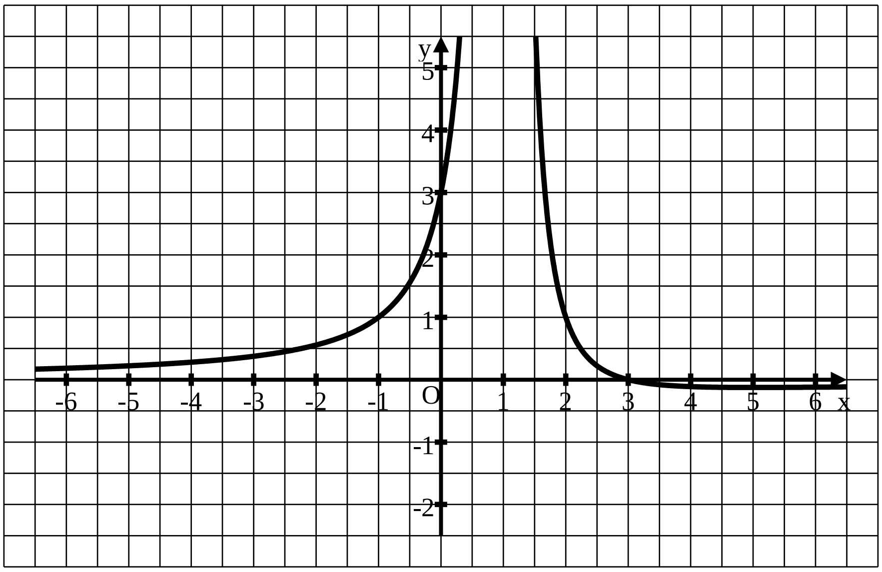
$x_2 = 1$: für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 1$ und $x > -1$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = -1$, $x = 1$, schiefe Asymptote: $y = x$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = 0$ (entspricht Nullstelle von K_f)

Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (entsprechen Definitionslücken)

$f_3(x) = \frac{3-x}{x^2-2x+1}$:



Definitionslücke: $x = 1$

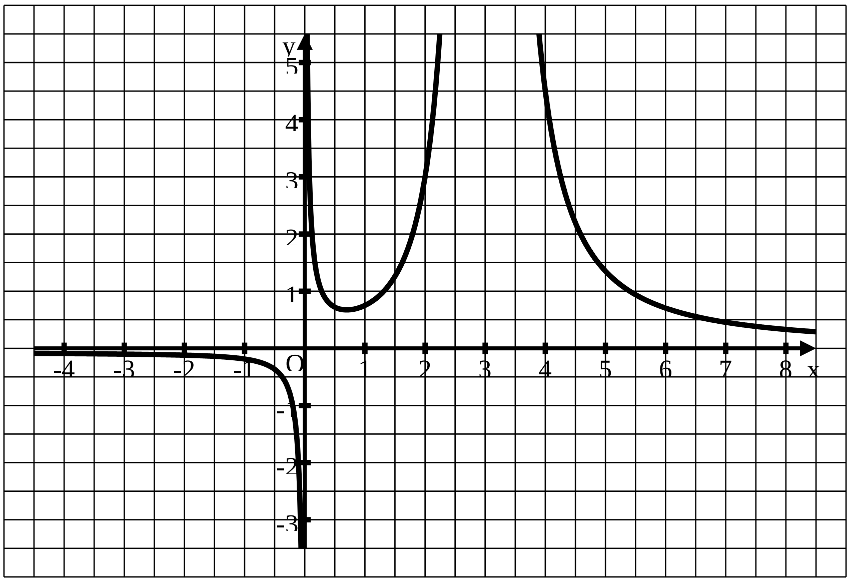
Verhalten an der Definitionslücke: für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $f(x) \to +\infty$, für $x \to 1$ und $x > 1$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 1$, waagrechte Asymptote: $y = 0$

Nullstelle der Zählerfunktion: $x = 3$ (entspricht Nullstelle von K_f)

Nullstelle der Nennerfunktion: $x = 1$ (entspricht Definitionslücke)

$f_4(x) = \frac{x^2+2}{x^3-6x^2+9x}$:



Definitionslücken: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Verhalten an den Definitionslücken:

$x_1 = 0$: für $x \to 0$ und $x < 0$ gilt: $f(x) \to -\infty$, für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $f(x) \to \infty$

$x_2 = 3$: für $x \to 3$ und $x < 3$ gilt: $f(x) \to +\infty$, für $x \to 3$ und $x > 3$ gilt: $f(x) \to +\infty$

senkrechte Asymptoten: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, waagrechte Asymptote: $y = 0$

Nullstelle der Zählerfunktion: nicht vorhanden

Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (entspricht Definitionslücken)

Aufgabe 2:

a) Die Nullstellen von f sind die Nullstellen der Zählerfunktion.

b) Die Definitionslücken von f sind die Nullstellen der Nennerfunktion.

c) f hat der Stelle x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „doppelt“ vorkommt (Vielfachheit 2).

d) f hat der Stelle x_0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn die Polstelle rechnerisch „einfach“ vorkommt (Vielfachheit 1).

Aufgabe 3:

$f_5(x) = \frac{2x^2-2x-12}{3x+6} = \frac{2(x^2-x-6)}{3(x+2)} = \frac{2(x+2)(x-3)}{3(x+2)} \rightarrow$ da sich der Faktor $(x+2)$ in Zähler und Nenner kürzt, verschwindet sowohl die Nullstelle als auch die senkrechte Asymptote.

Durch das Kürzen entsteht die Funktion $g(x) = \frac{2x-6}{3}$, deren Schaubild im Gegensatz zum Schaubild von f_5 keine Lücke bei $x = -2$ besitzt, sonst aber identisch verläuft.

Eine hebbare Definitionslücke x_0 von f liegt vor, wenn sie durch Kürzen des Funktionsterms behoben und dadurch der Definitionsbereich erweitert werden kann.