Die Betragsfunktion

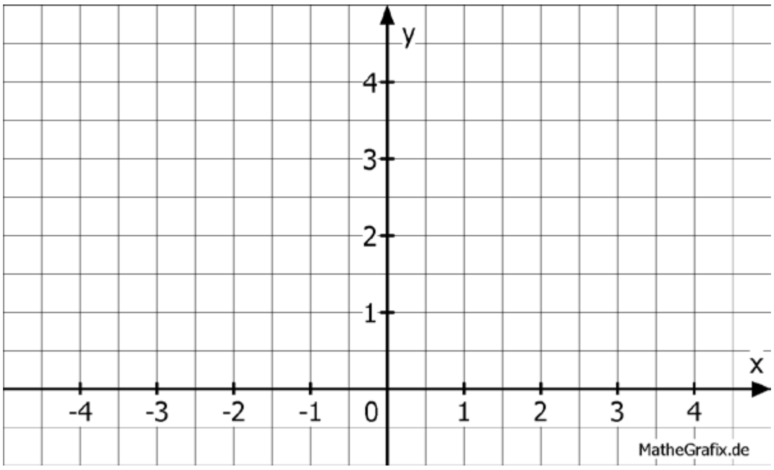
Definition

Die Funktion, die jedem $x \in IR$ seinen Betrag $|x|$ zuordnet, heißt ***Betragsfunktion***.

f: f(x) = |x|

Möchte man den Funktionsterm ohne Betragsstriche schreiben, so muss man die Funktion abschnittsweise definieren.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Zeichne das Schaubild K_f der Betragsfunktion in nebenstehendes Koordinatensystem.

Verschiebungen der Betragsfunktion

Wie bei anderen Funktionen auch, lässt sich das Schaubild K_f der Betragsfunktion durch Veränderung des Funktionsterms in x- und y-Richtung verschieben.

Beispiel: g(x) = |x - 3| - 2

Das Schaubild K_g von g entsteht aus K_f durch Verschiebung um 3 in x-Richtung und um -2 in y-Richtung.

Möchte man den Funktionsterm von g ohne Betragsstriche schreiben, so muss man die Funktion g abschnittsweise definieren. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig, da man nur dann auf die Betragsstriche verzichten kann, wenn man weiß, ob der Wert innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ ist.

<u>**1. Fall:** x - 3 ≥ 0</u>, d.h. x ≥ 3

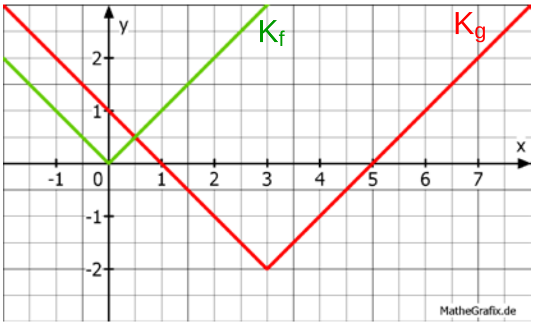
g(x) = |x - 3| - 2 = (x - 3) - 2 = x - 5

<u>**2. Fall:** x - 3 < 0</u>, d.h. x < 3

g(x) = |x - 3| - 2 = -(x - 3) - 2 = -x + 1

Insgesamt also

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{für } x \geq 3 \\ -x + 1 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$



Die Nullstellen von g lassen sich aus dem Schaubild ablesen: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$. Zur Berechnung dieser Nullstellen muss man die selbe Fallunterscheidung durchführen wie zur Bestimmung des Funktionsterms.

Aufgabe 1:

Beschreibe, durch welche Transformationen das Schaubild K_g aus dem Schaubild der Betragsfunktion hervorgeht, und skizziere das Schaubild in einem Koordinatensystem. Schreibe den Funktionsterm ohne Betragsstriche und berechne die Nullstellen von g.

a) g(x) = |x + 2| - 3 b) g(x) = |x - 1| + 4 c) g(x) = 5 - |x - 2|

Verknüpfungen von Betragsfunktionen

Aufgabe 2:

Schreibe den Funktionsterm ohne Betragsstriche und skizziere das Schaubild K_g in einem Koordinatensystem. Berechne die Nullstellen von g.

a) $g(x) = x + |x|$ b) $g(x) = x - |x|$ c) $g(x) = x \cdot |x|$ d) $g(x) = \frac{x}{|x|}$

Bemerkung:

Die Funktion g mit $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ heißt ***Signum-Funktion*** g: g(x) = sgn(x).

Aufgabe 3: Schreibe die Signum-Funktion ohne Betragsstriche und skizziere das Schaubild in einem Koordinatensystem.

Mehrere Beträge in einem Term / einer Gleichung

Treten in einem Term oder einer Gleichung mehrere Beträge auf, so muss die Fallunterscheidung so erfolgen, dass für jeden Fall eindeutig entschieden werden kann, ob die Werte innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ sind.

Beispiel: $|x + 3| = |2x - 2| + 1$

Ein Vorzeichenwechsel innerhalb der Betragsstriche kann nur an den entsprechenden Nullstellen der Terme innerhalb der Betragsstriche erfolgen, d.h. dort, wo $x + 3 = 0$ bzw. $2x - 2 = 0$ ist, also an den Stellen $x_1 = -3$ bzw. $x_2 = 1$. Dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

$x \leq -3$ oder $-3 < x \leq 1$ oder $x > 1$.

<u>**1. Fall:** $x \leq -3$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 \leq 0$ und $2x - 2 \leq 0$

Somit ist $|x + 3| = -(x + 3)$ und $|2x - 2| = -(2x -2)$.

Die Gleichung kann damit ohne Betragsstriche geschrieben und gelöst werden:

$\Rightarrow \quad -(x + 3) = -(2x - 2) + 1$

$\Leftrightarrow \quad -x - 3 = -2x + 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 6$

Dies ergibt keine Lösung unserer Gleichung, da in diesem Fall $x \leq -3$ sein muss.

<u>**2. Fall:** $-3 < x \leq 1$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 > 0$ und $2x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow \quad x + 3 = -(2x - 2) + 1$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = -2x + 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0$

Dies ist eine Lösung unserer Gleichung, da $x_1 = 0$ in dem für diesen Fall gültigen Bereich $-3 < x \leq 1$ liegt.

<u>**3. Fall:** $x > 1$</u> $\Rightarrow$ $x + 3 > 0$ und $2x - 2 > 0$

$\Rightarrow \quad x + 3 = 2x - 2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = 4$

Dies ist ebenfalls eine Lösung unserer Gleichung, da $x_2 = 4$ in dem für diesen Fall gültigen Bereich $x > 1$ liegt.

Insgesamt hat die Betragsgleichung also die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

Aufgabe 4:

Löse folgende Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung. Überprüfe deine Lösung graphisch, indem du die Schaubilder der linken und rechten Seite der Gleichung zeichnest (CAS oder Grafikrechner) und die Schnittpunkte bestimmst.

a) $|x + 8| = 3 \cdot |x|$

b) $|2x - 5| = 3 - |x - 1|$

c) $|x - 3| = |x + 1| - 5$

d) $|2 - x| = |x + 4| - 6$

e) $\frac{|x+6|}{|2x+1|} = 1$

Aufgabe 5:

Ersetze in Aufgabe 4 jeweils das Gleichheitszeichen durch eines der Ungleichheitszeichen $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ und löse die dabei entstehende Ungleichung. Überprüfe wie in Aufgabe 4 mit dem Taschenrechner.