Die Kettenregel

Didaktische Vorbemerkungen

Die Kettenregel kommt auch im regulären Jahrgangsstufenunterricht vor, so dass hier eine sorgfältige Abgrenzung notwendig ist, da Mathe+ ja weder dem Regelunterricht vorgreifen noch den am Kurs teilnehmenden Schülerinnen und Schülern einen offensichtlichen Vorteil verschaffen soll. Eine voll-kommende Beschränkung auf die „anderen“ Funktionstypen erscheint aber auch nicht sinnvoll, da ja ein realistisches Bild vom Einsatz der Kettenregel gegeben werden sollte. Die folgenden Beispiele mögen hier als Anregung dienen. Sie zeigen natürlich nur eine von vielen Möglichkeiten auf, mit dem Problem umzugehen. Und manche sind zugegebenermaßen „gefährlich“ nahe am Regelunterricht. Ein exakter Beweis der Kettenregel ist in der Schule schwierig, da er für gewöhnlich den Begriff der Stetigkeit benutzt. Das im Folgenden aufgeführte Plausibilitätsargument deutet aber immerhin das Entstehen der Ableitungsregel an. Es hat aber durchaus seine Tücken, insofern es die Werte betrifft, für die $g(x) - g(x_o) = 0$ sein könnte, wie man im Buch Analysis 1 von Barner/Flohr (Kap. 8.1) nachlesen kann.

Formulierung der Regel

Sind die Funktionen g und f differenzierbar und ist es möglich, ihre Verkettungsfunktion h mit $h(x) = f(g(x))$ zu bilden, so ist auch h differenzierbar und es gilt:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Plausibilitätsargument

Man kann den Differenzenquotienten folgendermaßen umformen:

$$\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_o)\big)}{x - x_o}$$

$$= \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_o)\big)}{g(x) - g(x_o)} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}.$$

Beispiele (zum rein formalen Ableiten):

$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$

$f(x) = \sqrt{\sin(x)}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos x$

$f(x) = \tan(e^{3x}), \quad f'(x) = \frac{1}{\cos(e^{3x})^2} \cdot 3e^{3x}$

$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$f(x) = \sin(\sqrt{x}), \quad f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Komplexeres Beispiel:

$f(x) = \frac{3}{(4x+x^3)^2} = 3 \cdot (4x+x^3)^{-2}$ und

$f'(x) = -6 \cdot (4x+x^3)^{-3} \cdot (4+3x^2) = -\frac{6(4+3x^2)}{(4x+x^3)^3}$

Anwendung: Ableitung der Logarithmusfunktion

Mit Hilfe der Kettenregel und der (bekannten) Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion kann man die Regel zum Ableiten der natürlichen Logarithmusfunktion gewinnen:

Mit $g(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$ hat man

$$h(x) = f(g(x)) = \ln(e^x) = x.$$

Und damit $h'(x) = 1$. Andererseits gilt nach der Kettenregel

$$h'(x) = (\ln(e^x))' \cdot e^x \ ,$$

also

$$(\ln(e^x))' \cdot e^x = 1.$$

Mit $e^x = u$ ergibt sich somit folgende Rechenregel:

$$(\ln(u))' \cdot u = 1 \quad \text{oder} \quad (\ln(u))' = \frac{1}{u}.$$

Beispiele (für die Ableitung von Funktionen mit logarithmischen Termen):

$f(x) = (\ln x^2)^3, \quad f'(x) = 3(\ln x^2)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$

$f(x) = \ln(\ln(x)), \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} = (\ln(x))^{-1}\,, \quad f'(\mathrm{x}) = -(\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$

$f(x) = \ln(e^x + 1), \quad f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x$

Komplexere Beispiele

Das erste Beispiel ($f(x) = x^x$) dürfte bei den Schülerinnen und Schülern auf besonderes Interesse stoßen. Die anderen beiden sollen nur die Möglichkeiten aufzeigen. Man kann sich auch vorstellen, hieraus einen Wettbewerb zu machen: Eine Gruppe denkt sich eine Funktion aus, die eine andere Gruppe dann ableiten muss. Man könnte zur Selbstkontrolle ein CAS-System einsetzen.

$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}, \quad f'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1)$

$f(x) = \ln(x^2 + x) \cdot \sin(\sqrt{x}), \quad f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \ln(x^2 + x)\cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sin\left(\frac{2}{\ln(x)}\right) = \sin(2\,(\ln(x))^{-1}), \quad f'(x) = \cos(2(\ln(x))^{-1}) \cdot (-2)(\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x}$