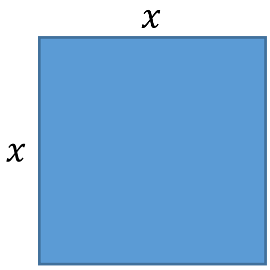


f ist die Funktion, die den Flächeninhalt des Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge x angibt. Der Funktionsterm von f ist _______________.
Bestimmen wir den Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f .

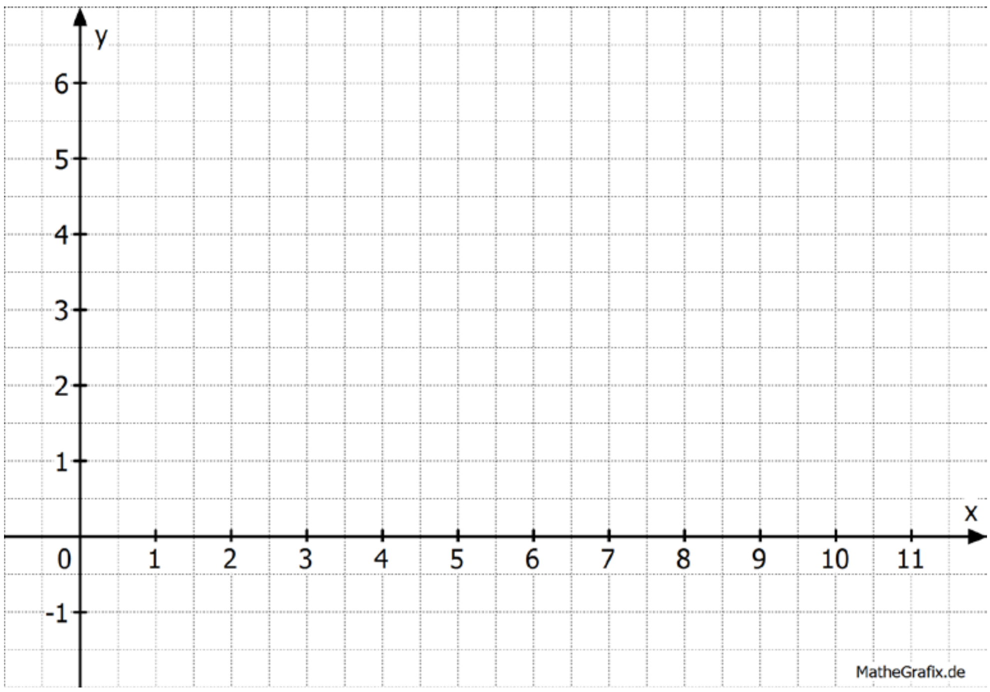
Wir setzen $f(x) = y$ und lösen die Gleichung nach x auf.

Wir vertauschen x und y und setzen dann $y = f^{-1}(x)$. So erhalten wir die **Umkehrfunktion** f^{-1} unserer ursprünglichen Funktion.

Bestimmen wir nun den Definitionsbereich sowie den Wertebereich der Umkehrfunktion.

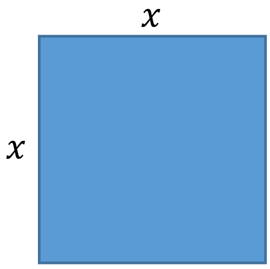
Betrachten wir das Schaubild der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$.

x	0	1	2	3	4	6,25	9
$f(x)$							



Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 7,5 FE hat eine Kantenlänge von ca. ________ LE.

Lösung



f ist die Funktion, die den Flächeninhalt des Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge x angibt. Der Funktionsterm von f ist $f(x) = x^2$.
Bestimmen wir den Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f .
$D = \mathbb{R}_+ , da\ es\ keine\ negative\ Kantenlänge\ gibt.\quad W = \mathbb{R}_+$.
Wir setzen $f(x) = y$ und lösen die Gleichung nach x auf.

$$y = x^2$$

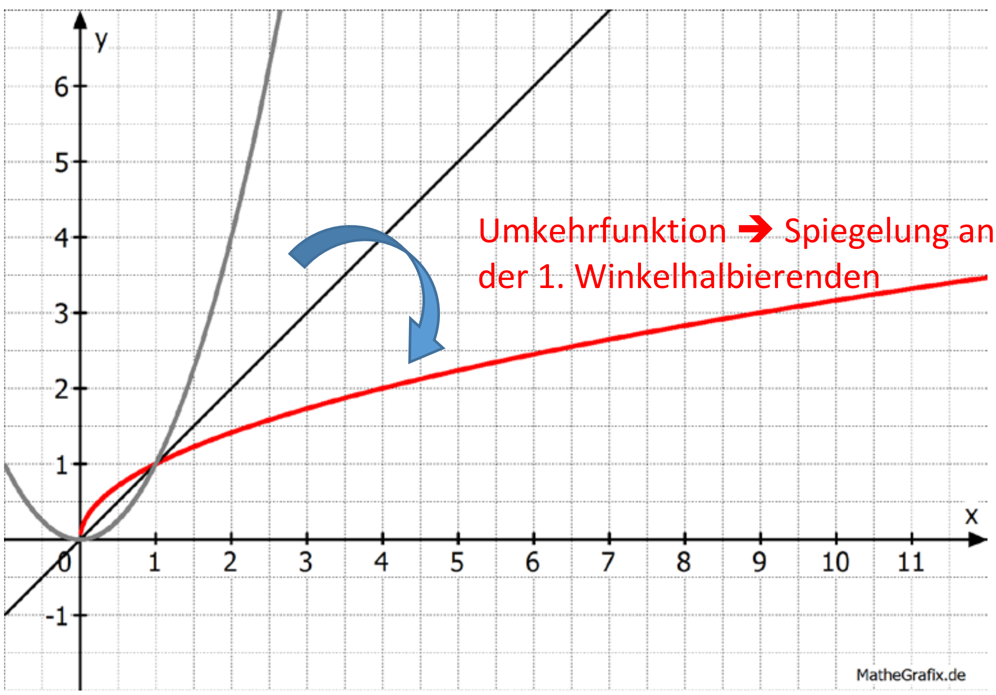
$\sqrt{y} = x$, nur positive Lösung, da x positiv

Wir vertauschen x und y und setzen dann $y = f^{-1}(x)$. So erhalten wir die **Umkehrfunktion** f^{-1} unserer ursprünglichen Funktion.

$$y = \sqrt{x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Bestimmen wir nun den Definitionsbereich sowie den Wertebereich der Umkehrfunktion.
$D = \mathbb{R}_+$ Die Quadratwurzel lässt sich nur von positiven Werten ziehen (zuvor Wertebereich).
$W = \mathbb{R}_+$ nur positive Kantenlängen sind gesucht (zuvor Definitionsbereich).
Betrachten wir das Schaubild der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$.

x	0	1	2	3	4	6,25	9
$f(x)$	0	1	1,4142…	1,732…	2	1,5	3



Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 7,5 FE hat eine Kantenlänge von ca. 2,74 LE.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion und den Definitionsbereich.
   a. $f(x) = -3(x+1)^2 + 6$
   b. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
   Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und begründen Sie, dass sich ein Halbkreis ergibt, also eine Figur, deren Punkte alle den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben.
3. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}\,,\ x \geq 1$ der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5\,,\ x \leq 2$
   c. indem Sie beschreiben, wie das Schaubild von f^{-1} durch Verschiebungen und Streckungen aus dem Schaubild der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ hervorgeht.
   d. durch Spiegelung des Schaubilds von f an der ersten Winkelhalbierenden.
4. K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{5 + x^2} - 6$.
   e. Geben Sie den Definitionsbereich an und untersuchen Sie K auf Achsenschnittpunkte.
   f. Die Tangenten und Normalen an den Nullstellen begrenzen ein Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Lösungen Aufgaben

1.

a. $y = -3(x+1)^2 + 6 \Leftrightarrow y - 6 = -3(x+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}y + 2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

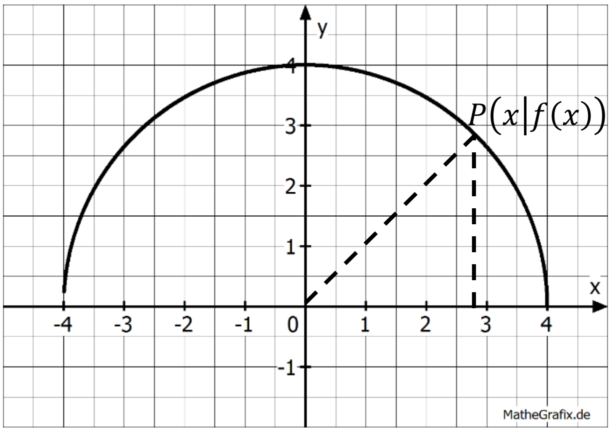
$\sqrt{2 - \frac{1}{3}y} = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2 - \frac{1}{3}y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{3}x} - 1\ ;\ \mathbb{D} =]-\infty; 6]$

b. $y = 2x^2 - 8x + 7 \Leftrightarrow y = 2(x-2)^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} = x - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} + 2\ ;\ \mathbb{D} = [-1; \infty[$

2. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}\quad \mathbb{D} = [-4; 4]$



Abstand mit dem Satz von Pythagoras

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2}$

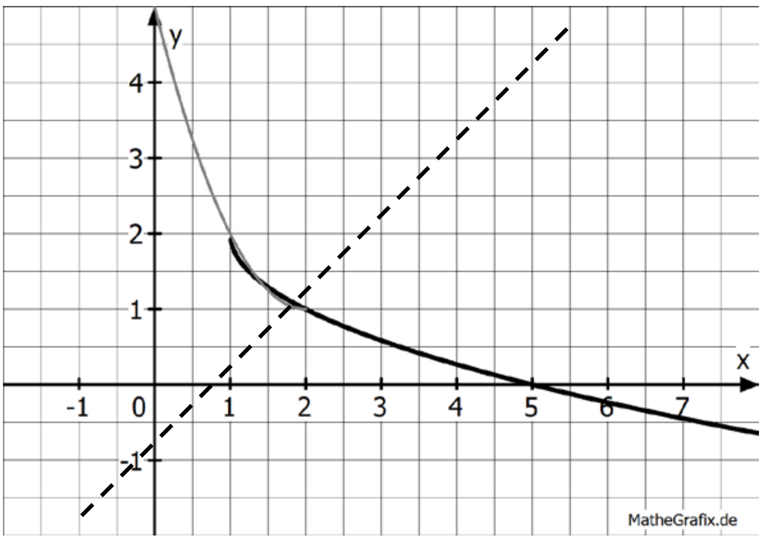
$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2}$

$\overline{OP} = \sqrt{16} = 4$

3.

a. Das Schaubild von f^{-1} entsteht aus $y = \sqrt{x}$ durch Spiegelung an der x-Achse, Verschiebungen um eine Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben.

b. $f(x) = (x-2)^2 + 1\ ,\ x \le 2$



4. K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{5+x^2} - 6$.

   a. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, da $5 + x^2 \geq 0$ für jedes x

   $f(0) = 2\sqrt{5} - 6 \approx -1{,}53 \quad S_y(0|-1{,}52)$

   $f(x) = 0 \iff 2\sqrt{5+x^2} - 6 = 0 \iff \sqrt{5+x^2} = 3$

   $\Longrightarrow 5 + x^2 = 9 \iff x^2 = 4 \iff x_{1/2} = \pm 2 \quad N_1(-2|0)\ N_2(2|0)$

   b. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{5+x^2}}$

   $f'(2) = \frac{4}{3} \qquad f'(-2) = -\frac{4}{3}$

   $t_1: y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \quad n_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

   $t_2: y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \qquad n_2: y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

   $A = 4 \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{50}{3} \approx 16{,}67\ FE$