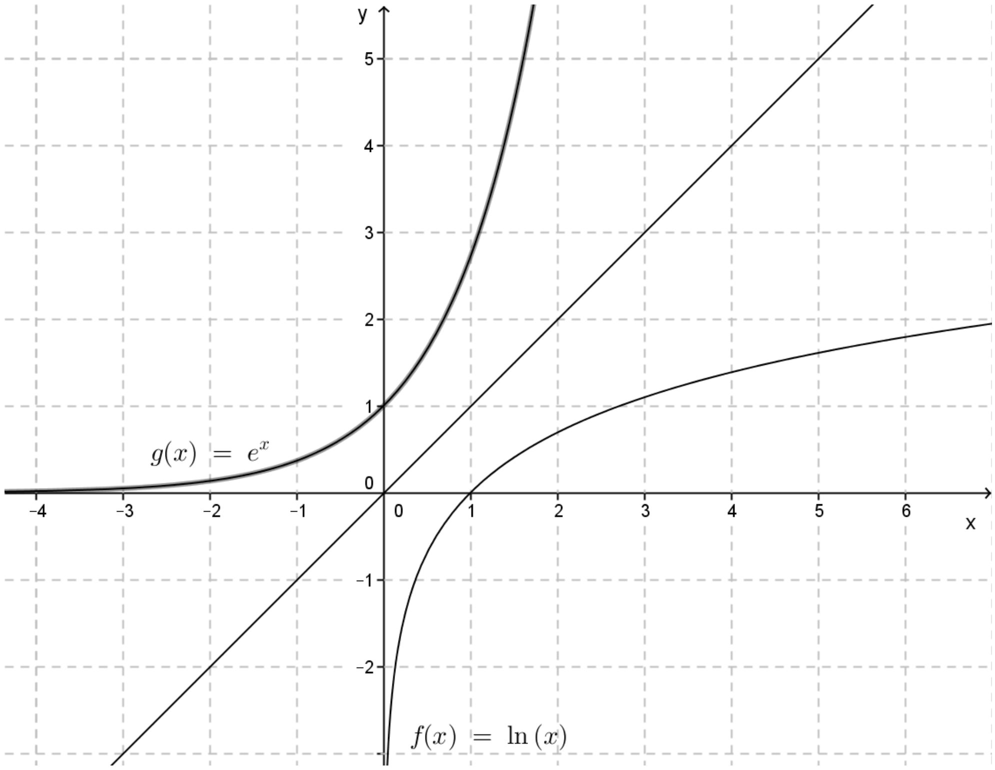
Übergeordneter Arbeitsauftrag: **Sozialform:** Partnerarbeit

Erarbeiten Sie sich das Thema „Die natürliche Logarithmusfunktion“ selbstständig.
Arbeiten Sie dazu die Infoboxen und Arbeitsaufträge durch. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse jeweils an der Kontrollstation.

Infobox 1

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt **natürliche Logarithmusfunktion** und wird mit $x \mapsto ln(x),\ x \in \mathbb{R}_+^*$ bzw. mit $f(x) = \ln(x), x \in \mathbb{R}_+^*$ bezeichnet.



Arbeitsauftrag 1:
Erarbeiten Sie mittels des obigen Schaubildes die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ und halten Sie Ihr Ergebnis nachfolgend fest:

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion
Definitionsbereich: D=
Wertebereich: W =
Es gilt: ln(1)= ___ . Folglich lautet die Nullstelle ________ .
Es gilt: ln(e) = ___ .
Für 0<x<1 liegt das Schaubild ________________ der x-Achse, also ln (x) ___ 0.
Für x>1 liegt das Schaubild ______________ der x-Achse, also ln(x) ___ 0.
Monotonie:
Grenzverhalten:
→Senkrechte Asymptote:
Die natürliche Logarithmusfunktion ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^*$.

Infobox 2

Bei der **Bestimmung der Definitionsmenge** muss beachtet werden, dass $\ln(g(x))$ nur für $g(x) > 0$ definiert ist.

Beispiele:

1. $f(x) = \ln(x - 2)$
   Es muss gelten $x - 2 > 0, also\ x > 2.$
   Somit D = $]2; \infty[$

2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
   Es muss gelten $x^2 - 1 > 0, also\ x > 1\ \vee x < -1.$
   Somit D = $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$

Arbeitsauftrag 2:
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f mit $f(x) = \ln(x + 5)$.

Arbeitsauftrag 3:

a) Wie entsteht das Schaubild von $\mathrm{g(x)} = -\ln(\mathrm{x})$ und das Schaubild von $\mathrm{h(x)} = \ln(-\mathrm{x})$ aus dem Schaubild von $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$? Stellen Sie eine Vermutung auf. Kontrollieren Sie Ihre Vermutung mit Ihrem Digitalen Mathematikwerkzeug.

b) Zeichen Sie das Schaubild von $\mathrm{i(x)} = \ln(\frac{1}{x})$ und vergleichen Sie es mit dem von $\mathrm{g(x)} = -\ln(\mathrm{x})$.

c) *Ordnen Sie die Parameter zu. (Vergleich mit Verhalten trigonometrischer Funktionen)*

$$f(x) = a\, ln(b(x-c)) + d$$

Streckung/ Stauchung in x-Richtung	Verschiebung in y-Richtung	Streckung in y-Richtung	Verschiebung in x-Richtung

Infobox 3

Lösen von Logarithmusgleichungen

Mögliche Gleichungstypen		Anwendung einer Lösungsstrategie
Beispiele	**Allg. Vorgehen**	**Im Beispiel**
$\ln(x) = 4$ $\ln(x^2 - 15) = 1$	Potenzieren mit Basis e	$\ln(x) = 4 \quad \mid \textit{potenzieren mit Basis e}$ $e^{\ln(x)} = e^4$ $x = e^4$ $\ln(x^2 - 15) = 1 \quad \mid \textit{potenzieren mit Basis e}$ $e^{\ln(x^2-15)} = e^1$ $x^2 - 15 = e \mid +15$ $x^2 = e + 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt{e+15} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{e+15}$
$x \cdot \ln(x) = 0$ $x \cdot \ln(x - 2) = 0$	Anwendung des Satzes vom Nullprodukt	$x \cdot \ln(x) = 0 \overset{SvNP}{\Longrightarrow} x_1 = 0 \notin D =]0;\infty[$ $\overset{SvNP}{\Longrightarrow} \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = 1$ (mit Vorgehen „Potenzieren mit Basis e“) $x \cdot \ln(x - 2) = 0 \overset{SvNP}{\Longrightarrow} x_1 = 0 \notin D =]2;\infty[$ $\overset{SvNP}{\Longrightarrow} \ln(x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = 3$ (mit Vorgehen „Potenzieren mit Basis e“)
$(\ln(x))^2 + 5\ln(x) + 6 = 0$	Substitution	Substitution: $\ln(x) = u \quad \Rightarrow \quad u^2 + 5u + 6 = 0$ $\Rightarrow \quad u_1 = -2 \qquad u_2 = -3$ Rücksubstitution: $x_1 = e^{-2} \quad \vee \quad x_2 = e^{-3}$

Arbeitsauftrag 4:

a) Vollziehen Sie die Lösungswege zum Lösen von Logarithmusgleichungen anhand der Beispiele nach.

b) Lösen Sie folgende Gleichungen:

1. $2\ln(x) - 2 = 0$
2. $2 - \ln(x^2) = 0$
3. $(\ln(x) + 1)^2 = 9$
4. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 8 = 0$
5. $xln(-x) - 4x = 0$
6. $6\ln(x) + (\ln(x))^2 = -5$
7. $2\ln(x) - 1 = \ln(x) + 3$

Infobox 4

Die **Ableitungsfunktion f`** der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x),\ x \in \mathbb{R}_+^*$ lautet $f`(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\cdot ln\left(\frac{x+h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right))$$

$$= \lim_{h\to 0}(\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{x}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}})$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}(ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}) = \frac{1}{x}\cdot\ln(e) = \frac{1}{x}$$

Weiterhin finden die Summen- und Faktorregel Anwendung. Ebenso können die Kettenregel, die Produktregel und die Quotientenregel bei der Bildung von Ableitungen logarithmischer Funktionen zum Einsatz kommen.

a) **Kettenregel**: $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$ $\quad f`(x) = \frac{1}{u(x)}\cdot u`(x)$

Beispiele:

$f(x) = \boxed{\ln}(\boxed{2x})$ — Äußere Funktion, Innere Funktion

$f`(x) = \boxed{\frac{1}{2x}}\cdot\boxed{2} = \frac{1}{x}$ — Ableitung äußere Funktion, Ableitung innere Funktion

$f(x) = \ln(3x+1)$ $\quad f`(x) = \frac{1}{3x+1}\cdot 3 = \frac{3}{3x+1}$

b) **Produktregel**: $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $\quad f`(x) = u`(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v`(x)$

Beispiel:

$f(x) = x\cdot\ln(x)$ $\quad f`(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

a) **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\quad f`(x) = \frac{u`(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v`(x)}{(v(x))^2}$

Beispiel:

$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ $\quad f`(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 2\ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2\cdot(1-\ln(x))}{x^2}$

Arbeitsauftrag 5:

Bilden Sie jeweils die Ableitungsfunktion f`.

a) $f(x) = -2x - 0{,}5\ln(x)$
b) $f(x) = 2x^2 - ex + 5\ln(x) + 1$
c) $f(x) = s \cdot ln(-x) + 5x$
d) $f(x) = 3\ln(x^2 - 4)$
e) $f(x) = \ln(e)\,x + 2\ln(ex)$
f) $f(x) = xln(x - 2)$
g) $f(x) = \frac{4\ln(x)}{x}$
h) $f(x) = (\ln(x) - 3)^2$
i) $f(x) = (x - 1)\ln(x)$
j) $f(x) = \ln(3x - 4)\,x^2$
k) $f(x) = \frac{2x^3}{\ln(x)}$

Arbeitsauftrag 6:

Zeichen Sie die Schaubilder der nachfolgenden Logarithmusfunktionen mit einem digitalen Mathematikwerkzeug.

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und die „Randstelle“ an.

Ermitteln Sie mittels Untersuchung des Grenzverhaltens, ob es eine Asymptote gibt. (Achtung: Es kann senkrechte und waagrechte Asymptoten geben!)

a) $f(x) = \ln(x - 1)$
b) $f(x) = x \cdot ln(x)$
c) $f(x) = x \cdot \ln(x + 3)$
d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Arbeitsauftrag 7:

Erstellen Sie ein Vernetzungsdiagramm zum Thema „Die natürliche Logarithmusfunktion“.

Ordnen Sie dazu die beiliegenden Begriffskärtchen und selbst geschriebene Kärtchen, auf einem leeren Blatt Papier in einer sinnvollen Struktur an.

Stellen Sie Zusammenhänge durch Verbindungspfeile, -linien und ggf. Wörtern und Begriffen her.

Kleben Sie am Ende die Begriffskärtchen auf.

Arbeitsauftrag 8:

Bearbeiten Sie nachfolgende Aufgabe.

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 1 - (\ln(1 - x))^2,\ x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f heißt K.

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f. Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

(Aus einer alten Abituraufgabe (BG, LK 1993, Gruppe 1, Analysis, Aufgabe 3))

Nullstellen	f(x)=a ln(b(x)+c)+d	Asymptoten	Quotientenregel	Verlauf vom I. in den II. Quadranten
Senkrechte Asymptote	ln(1)=o	Definitionsbereich	Streckung in y-Richtung	Potenzieren mit Basis e
Satz vom Nullprodukt	Kettenregel	Substitution	Waagrechte Asymptote	Produktregel
ln-Funktion in x-Richtung gestreckt	Monotonie	ln(e)=1	f`(x)=$\frac{1}{x}$	Das Schaubild von i(x)=ln(x)

Kontrollstation:

Arbeitsauftrag 1:

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion
Definitionsbereich: D= $\mathbb{R}_+^*$
Wertebereich: W = $\mathbb{R}$
Es gilt: ln(1)= 0 . Folglich lautet die Nullstelle x = 0.
Es gilt: ln(e) = 1 .
Für 0<x<1 liegt das Schaubild unterhalb der x-Achse, also ln (x) < 0.
Für x>1 liegt das Schaubild oberhalb der x-Achse, also ln(x) > 0.
Monotonie: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\ mit\ x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
Somit ist f streng monoton steigend auf D.
Grenzverhalten: Für $x \to \infty\ gilt\ f(x) \to \infty$
Für $x \to 0\ gilt\ f(x) \to -\infty$
→Senkrechte Asymptote: x = 0
Die natürliche Logarithmusfunktion ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^*$.

Arbeitsauftrag 2:
Es muss gelten x + 5 > 0, also x > -5.
Somit D =]-5; ∞[

Arbeitsauftrag 3:
a)

Das Schaubild von $g(x) = -\ln(x)$ entsteht aus dem von $\mathrm{f(x)} = \ln(x)$ durch Spiegelung an der x-Achse.
Das Schaubild von $h(x) = \ln(-x)$ entsteht aus dem von $\mathrm{f(x)} = \ln(x)$ durch Spiegelung an der y-Achse.

b)

Es handelt sich um das gleiche Schaubild. Fazit: Spiegelung des Schaubildes der Funktion f mit f(x)=ln(x) an der x-Achse ist durch Hinzufügen eines negativen Vorzeichens oder durch Kehrwertbildung des Numerus möglich.

c)

$$f(x) = a\ ln(b(x-c)) + d$$

Streckung/ Stauchung in x-Richtung

Verschiebung in y-Richtung

Streckung in y-Richtung

Verschiebung in x-Richtung

Arbeitsauftrag 4:

1. $2\ln(x) - 2 = 0$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt **x = e**
2. $2 - \ln(x^2) = 0$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $x_{1/2}$ **=** $\pm\sqrt{\mathbf{e^2}}$
3. $(\ln(x) + 1)^2 = 9$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $\mathbf{x_1 = e^2}$ oder $\mathbf{x_2 = e^{-4}}$
4. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 8 = 0$ — Substitution und potenzieren mit Basis e ergibt $\mathbf{x_1 = e^4}$ oder $\mathbf{x_2 = e^{-2}}$
5. $xln(-x) - 4x = 0$ — Satz von Nullprodukt und potenzieren mit Basis e ergibt $\mathbf{x = -e^4}$
6. $6\ln(x) + (\ln(x))^2 = -5$ — Substitution und potenzieren mit Basis e ergibt $\mathbf{x_1 = e^{-1}}$ und $\mathbf{x_2 = e^{-5}}$
7. $2\ln(x) - 1 = \ln(x) + 3$ — Auflösen nach ln(x) und potenzieren mit Basis e ergibt $\mathbf{x = e^4}$

Arbeitsauftrag 5:

a) $f`(x) = -2 - \frac{1}{2x}$

b) $f`(x) = 4x - e + \frac{5}{x}$

c) $f`(x) = \frac{s}{x} + 5$

d) $f`(x) = \frac{6x}{x^2-4}$

e) $f`(x) = 1 + \frac{2}{x}$

f) $f`(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$

g) $f`(x) = \frac{4-4\ln(x)}{x^2}$

h) $f`(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) - 3)$

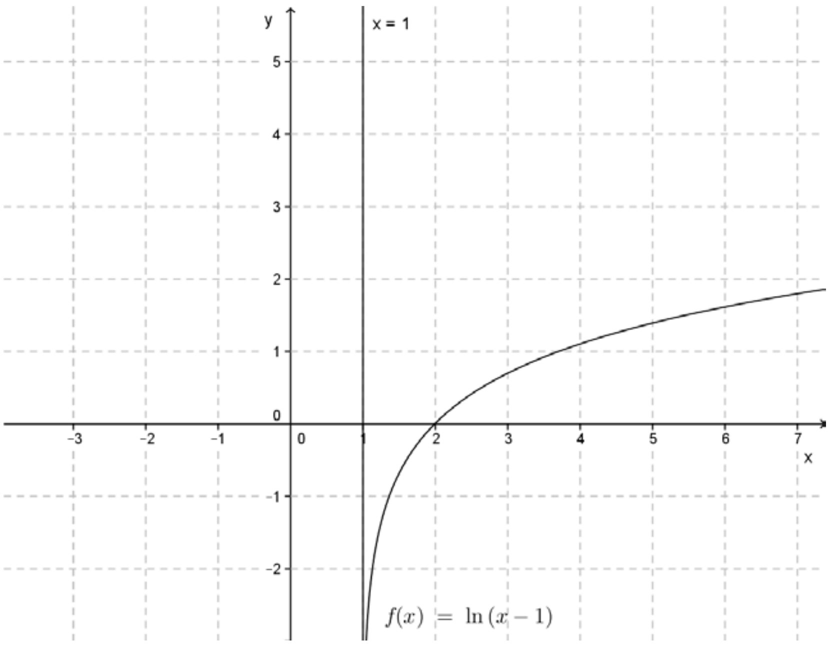
i) $f`(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x}$

j) $f`(x) = \frac{3x^2}{3x-4} + 2xln(3x-4)$

k) $f`(x) = \frac{2x^2(3\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2}$

Arbeitsauftrag 6:

a)



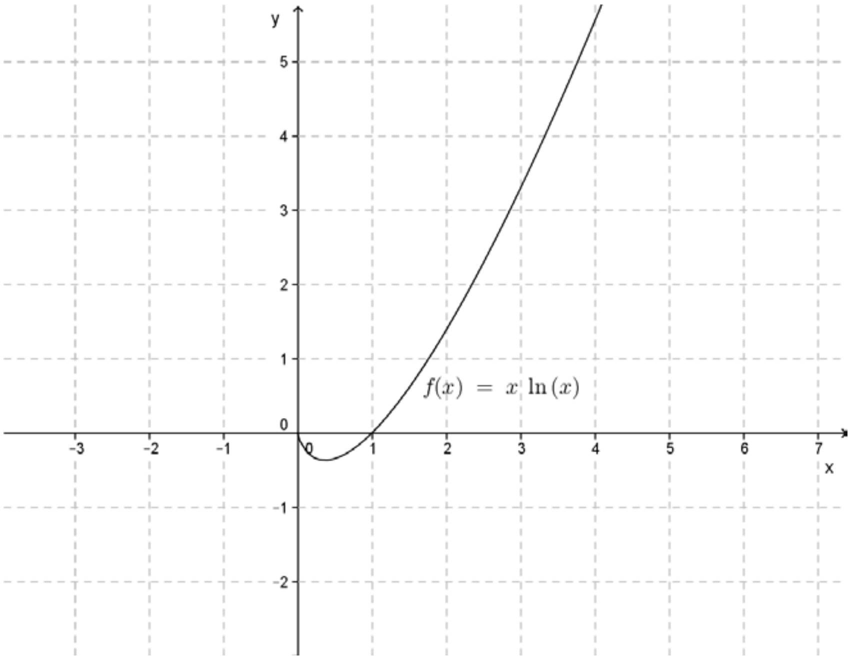
D$=]1;\infty[$

Randstelle x=1

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

Senkrechte Asymptote:
x=1

b)



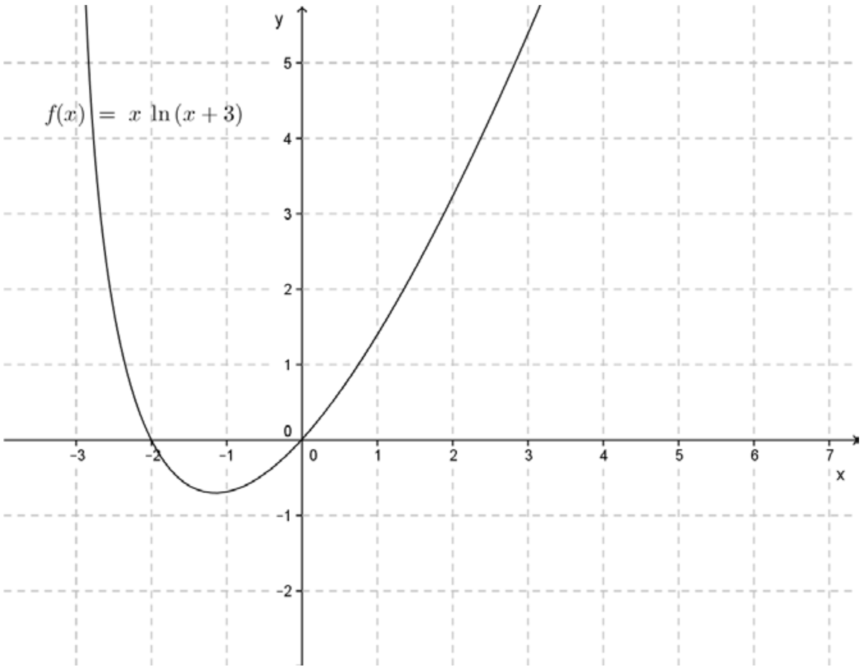
D=$]0;\infty[$

Randstelle x=0

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
x ist dominant

Keine Asymptote

c)



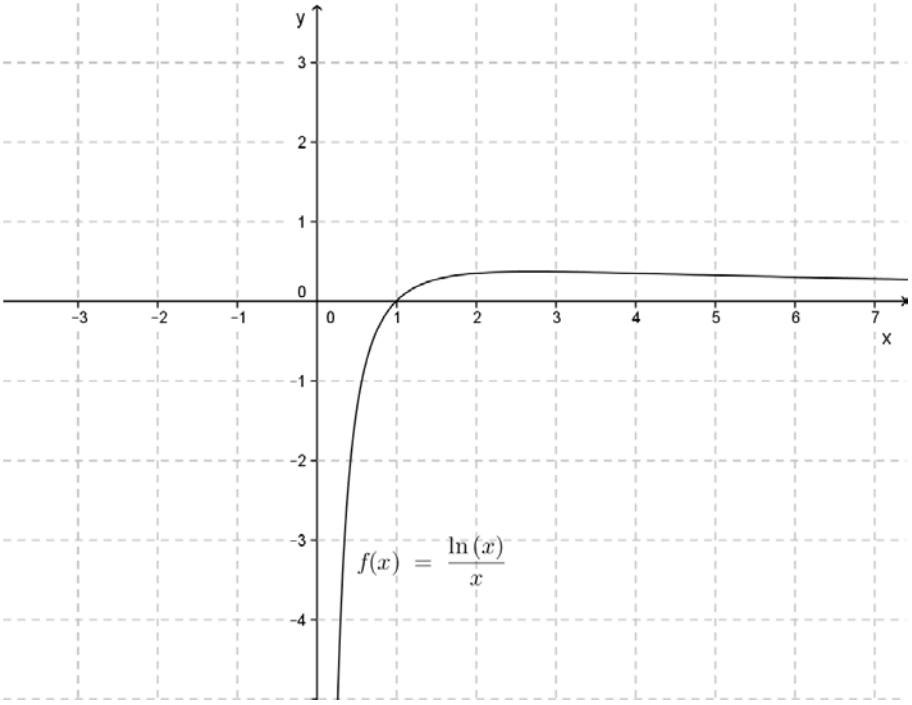
D=$]-3;\infty[$

Randstelle x=-3

$\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$

Senkrechte Asymptote:
x=-3

d)



D=$]0;\infty[$

Randstelle x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Senkrechte Asymptote: x=0

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

x dominiert

Waagrechte Asymptote: y=0

Arbeitsauftrag 7:

Schülerindividuelle Lösung

Arbeitsauftrag 8:

Definitionsbereich:
D=$]-\infty;1[$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
$f(x) = 0$ führt mit einigen Rechenschritten zu $\ln(1-x) = \pm 1$. Mit potenzieren zur Basis e erhält man $x_1 = 1-e \quad \vee \quad x_2 = 1-e^{-1}$.
Folglich $N_1(1-e|0)$ und $N_2(1-e^{-1}|0)$.
$f(0) = 1$, also $S_y(0|1)$

Asymptoten:
$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$
Senkrechte Asymptote: x=1

Extrem- und Wendepunkte:

$$f`(x) = \frac{2\ln(1-x)}{1-x} \qquad f``(x) = \frac{-2+2\ln(1-x)}{(1-x)^2}$$

$f`(x) = 0$ ergibt x=0 und $f``(0) = -2 < 0 \rightarrow HP \qquad f(0) = 1 \qquad HP(0|1)$
$f``(x) = 0$ ergibt x=1-e, einfache Nullstelle daher VZW $\rightarrow WP \qquad f(1-e) = 0 \qquad W(1-e|0)$