

Übungsaufgaben

Produktintegration

1) Berechne folgende Integrale.

a) $\int_0^1 x \cdot e^x dx =$

b) $\int_{-1}^3 e^{-x} \cdot 3x dx =$

c) $\int_1^2 x \cdot \ln(x) dx =$

d) $\int_0^4 x \cdot \sqrt{x+5} dx =$

2) Berechne folgende Integrale durch mehrfache Anwendung der Produktintegration.

a) $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x + 4) \cdot e^x dx =$

b) $\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx =$

3) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x$ mit der x -Achse einschließt.

4) Berechne.

a) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$

b) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx$

Substitution

1) Berechne folgende Integrale.

$$a) \int_3^4 \frac{3}{4x+1} dx =$$

$$b) \int_1^2 \frac{6}{(2x-1)^3} dx =$$

$$c) \int_{-2}^2 e^{4-2x} dx =$$

$$d) \int_1^3 \frac{4}{e^{2x-4}} dx =$$

$$e) \int_0^4 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx =$$

2) Die folgenden Integrale lassen sich sowohl durch Integration mit Substitution als auch durch Produktintegration bestimmen. Berechne jedes Integral auf zwei verschiedene Arten.

$$a) \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx =$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx =$$

$$c) \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx =$$

3) Gib verschiedene Funktionen u an, bei denen das Integral durch Substitution berechnet werden kann.

$$a) \int_a^b (x^2 + x)^3 \cdot u(x) dx =$$

$$b) \int_a^b e^{x^2+2} \cdot u(x) dx =$$

$$c) \int_a^b \frac{4x^2}{\sqrt{u(x)}} dx =$$

$$d) \int_a^b (u(x))^2 \cdot 4x^3 dx =$$

Bogenlänge einer Kurve

1) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$.

Berechne die Bogenlänge zwischen den Punkten $A(1|1)$ und $B(4|8)$.

2) Berechne die Bogenlänge des Schaubildes der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ im Intervall $[-a; a]$.

3) Beim Ballweitwurf erzielt Tom eine ebene Wurfdistanz von 90 m. Die maximale Flughöhe beträgt 28 m. Berechne die Länge der Flugbahn des Balls.
(Hinweis: Die Flugbahn darf als Parabel angenähert werden.)

Rotation um die y-Achse

1) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 2$ schließt im Intervall $I \left[0; \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$ mit der x-Achse eine Fläche ein. Bei der Rotation der Fläche um die y-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen.

2) Eine Obstschale hat ein parabelförmiges Profil mit einer Höhe von 30 cm sowie einem Durchmesser von 30 cm.

a) Bestimme die Gleichung der zugehörigen Parabel.

b) Berechne das Volumen der Obstschale.

3) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{6}{x}$ sowie die y-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $y = 3$ sowie $y = 12$ begrenzen eine um die y-Achse rotierende Fläche.

a) Skizziere den beschriebenen Sachverhalt.

b) Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

4) Die Schaubilder der Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - x^4$ und $g(x) = 3x^2$ begrenzen im positiven x-Bereich eine Fläche, die um die y-Achse rotieren soll.

a) Skizziere den beschriebenen Sachverhalt.

b) Berechne deren Flächeninhalt.

Lösungen zu Übungsaufgaben

Produktintegration

1)

$$\text{a) } \int_0^1 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^3 e^{-x} \cdot 3x dx &= [3x \cdot (-e^{-x})]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 3 \cdot (-e^{-x}) dx = [-3xe^{-x}]_{-1}^3 - [3e^{-x}]_{-1}^3 \\ &= (-9e^{-3} - 3e^1) - (3e^{-3} - 3e^1) = -12e^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_1^2 x \cdot \ln(x) dx &= \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = (2 \cdot \ln(2) - 0) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \cdot \ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^4 x \cdot \sqrt{x+5} dx &= \int_0^4 x \cdot (x+5)^{\frac{1}{2}} dx = \left[x \cdot \frac{2}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \int_0^4 1 \cdot \frac{2}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \left[x \cdot \frac{2}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \left[\frac{4}{15} (x+5)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = 72 - \left(\frac{324}{5} - \frac{4}{15} \cdot 25\sqrt{5} \right) \approx 22,107 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-2}^0 (x^2 + 2x + 4) \cdot e^x dx &= [(x^2 + 2x + 4) \cdot e^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (2x + 2) \cdot e^x dx \\ &= [4 - 4e^{-2}] - \int_{-2}^0 (2x + 2) \cdot e^x dx = [4 - 4e^{-2}] - \left([(2x + 2) \cdot e^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 2 \cdot e^x dx \right) \\ &= [4 - 4e^{-2}] - ([2 - (-2e^{-2})] - [2e^x]_{-2}^0) = [4 - 4e^{-2}] - ([2 + 2e^{-2}] - [2 - 2e^{-2}]) \\ &= 4 - 4e^{-2} - 4e^{-2} = 4 - 8e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx &= [x^2 \cdot (-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \cdot (-\cos(x)) dx = \pi^2 - \int_0^\pi 2x \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= \pi^2 - \left([2x \cdot (-\sin(x))]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \cdot (-\sin(x)) dx \right) = \pi^2 - (0 - [2 \cdot \cos(x)]_0^\pi) \\ &= \pi^2 - (0 - (-2 - 2)) \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

3) Schnittstellen mit der x-Achse: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \int_{-3}^3 (x^2 - 9) \cdot e^x dx &= [(x^2 - 9) \cdot e^x]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 2x \cdot e^x dx = 0 - \left([2x \cdot e^x]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 2 \cdot e^x dx \right) \\
 &= 0 - (6e^3 - (-6e^{-3}) - [2e^x]_{-3}^3) = 0 - (6e^3 + 6e^{-3} - (2e^3 - 2e^{-3})) \\
 &= -6e^3 - 6e^{-3} + 2e^3 - 2e^{-3} \\
 &= -4e^3 - 8e^{-3} \approx -80,74 \rightarrow A \approx 80,74
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot \cos(x) dx = [\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\sin(x) \cdot \sin(x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \\
 &\rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \quad | + \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \\
 &\rightarrow 2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx \quad | : 2 \\
 &\rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{1}{2} \cdot [x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx &= [\sin(x) \cdot e^x]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) \cdot e^x dx \\
 &= -e^{\frac{3}{2}\pi} - ([\cos(x) \cdot e^x]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} -\sin(x) \cdot e^x dx) = -e^{\frac{3}{2}\pi} - (0 - 1) - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx \\
 &\rightarrow \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx = -e^{\frac{3}{2}\pi} + 1 - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx \quad | + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx \\
 &\rightarrow 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx = -e^{\frac{3}{2}\pi} + 1 \quad | : 2 \\
 &\rightarrow \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot e^x dx = \frac{-e^{\frac{3}{2}\pi} + 1}{2}
 \end{aligned}$$

Substitution

1)

a) $\int_3^4 \frac{3}{4x+1} dx$:

Substitution: $u = 4x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \rightarrow dx = \frac{1}{4} du$

$$\rightarrow \int_3^4 \frac{3}{4x+1} dx = 3 \cdot \int_3^4 \frac{1}{4x+1} dx = 3 \cdot \int_3^4 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{4} du = \frac{3}{4} \cdot \int_3^4 \frac{1}{u} du = \frac{3}{4} \cdot [\ln(u)]_3^4$$

Rücksubstitution: $u = 4x + 1 \rightarrow \int_3^4 \frac{3}{4x+1} dx = \frac{3}{4} \cdot [\ln(4x+1)]_3^4 = \frac{3}{4} \cdot (\ln(17) - \ln(13))$

b) $\int_1^2 \frac{6}{(2x-1)^3} dx$:

Substitution: $u = 2x - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_1^2 \frac{6}{(2x-1)^3} dx &= 6 \cdot \int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^3} dx = 6 \cdot \int_1^2 \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = 3 \cdot \int_1^2 \frac{1}{u^3} du = 3 \cdot \int_1^2 u^{-3} du \\ &= 3 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot u^{-2} \right]_1^2 = -\frac{3}{2} \cdot [u^{-2}]_1^2 = -\frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{u^2} \right]_1^2 \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u = 2x - 1 \rightarrow \int_1^2 \frac{6}{(2x-1)^3} dx = -\frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{(2x-1)^2} \right]_1^2 = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{4}{3}$

c) $\int_{-2}^2 e^{4-2x} dx$:

Substitution: $u = 4 - 2x \rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$

$$\rightarrow \int_{-2}^2 e^{4-2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 e^u du = -\frac{1}{2} \cdot [e^u]_{-2}^2$$

Rücksubstitution: $u = 4 - 2x \rightarrow \int_{-2}^2 e^{4-2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot [e^{4-2x}]_{-2}^2 = -\frac{1}{2} \cdot (1 - e^8) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^8$

d) $\int_1^3 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^3 \frac{1}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^3 e^{4-2x} dx$:

Substitution: $u = 4 - 2x \rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$

$$\rightarrow \int_1^3 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^3 \frac{1}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^3 e^{4-2x} dx = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_1^3 e^u du = -2 \cdot ([e^u]_1^3)$$

Rücksubstitution: $u = 4 - 2x \rightarrow \int_1^3 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = -2 \cdot ([e^{4-2x}]_1^3) = -2 \cdot (e^{-2} - e^2) = -2e^{-2} + 2e^2$

e) $\int_0^4 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = \int_0^4 (x - 1) dx - \int_0^4 e^{-\frac{1}{2}x} dx$:

1. Integral: $\int_0^4 (x - 1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^4 = 8 - 4 = 4$

2. Integral: Substitution: $u = -\frac{1}{2}x \rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \rightarrow dx = -2 \cdot du$

$$\rightarrow \int_0^4 \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = (-2) \int_0^4 e^u du = -2[e^u]_0^4$$

$$\begin{aligned} \text{Rücksubstitution: } u = -\frac{1}{2}x \rightarrow \int_0^4 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx &= \int_0^4 (x - 1) dx - \int_0^4 e^{-\frac{1}{2}x} dx = 4 + \\ &2 \left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^4 \\ &= 4 + 2(e^{-2} - 1) = 2 + 2e^{-2} \end{aligned}$$

2)

a) $\int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$:

$$\begin{aligned} \text{Produktregel: } \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx &= [\ln(x) \cdot \ln(x)]_1^{2e} - \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx \quad | + \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx \\ \rightarrow 2 \cdot \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx &= [\ln(x) \cdot \ln(x)]_1^{2e} \quad | : 2 \\ \rightarrow \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx &= \frac{1}{2} \cdot [\ln(x) \cdot \ln(x)]_1^{2e} = \frac{1}{2} \cdot (\ln(2e))^2 (\approx 1,43) \end{aligned}$$

Substitution: $u = \ln(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x \cdot du$

$$\rightarrow \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \int_1^{2e} \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^{2e} \frac{u}{x} \cdot x \cdot du = \int_1^{2e} u du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^{2e}$$

Rücksubstitution: $u = \ln(x) \rightarrow \int_1^{2e} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^2\right]_1^{2e} = \frac{1}{2} \cdot (\ln(2e))^2$

b) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx$:

$$\begin{aligned} \text{Produktregel: } \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx &= [\sin(x) \cdot \sin(x)]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) \cdot \sin(x) dx \quad | + \\ &\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) \cdot \sin(x) dx \end{aligned}$$

$$\rightarrow 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) \cdot \sin(x) dx = [\sin(x) \cdot \sin(x)]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \quad | : 2$$

$$\rightarrow \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x) \cdot \sin(x)]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) = 0$$

Substitution: $u = \sin(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} du$

$$\rightarrow \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} u \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} du = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} u du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

Rücksubstitution: $u = \sin(x) \rightarrow \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin^2(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) = 0$

c) $\int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$:

Produktregel:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx &= [\sin^2(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin^2(x) \cos(x) dx \quad | + \int_0^\pi 2\sin^2(x) \cos(x) dx \\ \rightarrow 3 \cdot \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx &= [\sin^2(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi \quad | : 3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{3} \cdot [\sin^2(x) \cdot \sin(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{3} \cdot (0 - 0) = 0$$

Substitution: $u = \sin(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} du$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int_0^{\pi} u^2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} du = \int_0^{\pi} u^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_0^{\pi}$$

Rücksubstitution: $u = \sin(x) \rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3(x) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} \cdot (0 - 0) = 0$

3) jeweils richtig begründete Möglichkeiten

Bogenlänge einer Kurve

1) $f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx$$

Substitution: $u = 1 + \frac{9}{4} x \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{4} \rightarrow dx = \frac{4}{9} du$

$$\rightarrow \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \int_1^4 \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

Rücksubstitution: $u = 1 + \frac{9}{4} x \rightarrow \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \cdot$

$$\left[\left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27} \cdot \left(10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right) \approx 7,63$$

2) $f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x})\right)^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2} dx$$

Aufgrund der y-Achsensymmetrie lässt sich das Integral folgendermaßen umschreiben:

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2} dx = 2 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2} dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} dx = 2 \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx = 2 \cdot \int_0^a \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx \\
 &= [e^x - e^{-x}]_0^a \\
 &= (e^a - e^{-a}) - (e^0 - e^0) = e^a - e^{-a}
 \end{aligned}$$

3) Länge des Wurfes \triangleq Schnittstellen mit der x-Achse $\rightarrow N_1(-45|0), N_2(45|0)$

Maximale Flughöhe 28 m \rightarrow Scheitel $S(0|28)$

\rightarrow Gegebene Punkte führen auf die Parabelgleichung p:

$$p(x) = -\frac{28}{2025}(x + 45)(x - 45) = -\frac{28}{2025}(x^2 - 45^2) = -\frac{28}{2025}x^2 + 28; p'(x) = -\frac{56}{2025}x$$

Aufgrund der y-Achsensymmetrie lässt sich das Integral folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \cdot \int_0^{45} \sqrt{1 + \left(-\frac{56}{2025}x\right)^2} dx = 2 \cdot \int_0^{45} \sqrt{1 + \frac{3136}{4100625}x^2} dx = 2 \cdot \int_0^{45} \left(1 + \frac{3136}{4100625}x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4100625}{6272x} \cdot \left(1 + \frac{3136}{4100625}x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{45} \approx 109,6
 \end{aligned}$$

Rotation um die y-Achse

1) $f(x) = 3x^2 - 2$: Neue Integrationsgrenzen: $y_1 = f(0) = -2$; $y_2 = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0$

Bildung der Umkehrfunktion \bar{f} : $f(x) = y = 3x^2 - 2 \rightarrow$ Umstellen der Funktionsgleichung nach x führt auf: $\sqrt{\frac{y+2}{3}} = x = \bar{f}(y)$

$$\rightarrow V = \pi \cdot \int_{-2}^0 (\bar{f}(y))^2 dy = \pi \cdot \int_{-2}^0 \frac{y+2}{3} dy = \pi \cdot \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{2}{3}y \right]_{-2}^0 = \pi \cdot \left(0 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{2}{3}\pi \approx 2,09$$

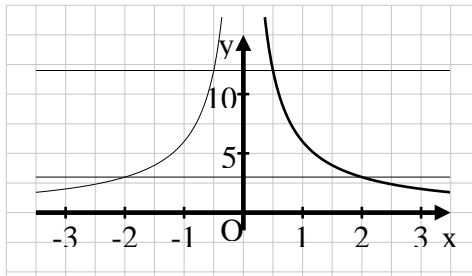
2) a) Ansatz für die Parabel: $f(x) = ax^2$

30 cm Höhe und 30 cm Durchmesser führen auf den Punkt $P(15|30) \rightarrow f(x) = \frac{2}{15}x^2$

b) Bildung der Umkehrfunktion \bar{f} : $f(x) = y = \frac{2}{15}x^2 \rightarrow \bar{f}(y) = x = \sqrt{\frac{15}{2}y}$

$$\rightarrow V = \pi \cdot \int_0^{30} (\bar{f}(y))^2 dy = \pi \cdot \int_0^{30} \frac{15}{2}y dy = \pi \cdot \left[\frac{15}{4}y^2 \right]_0^{30} = 3375\pi \approx 10602,88 \text{ cm}^3 \approx 10,6 \text{ l}$$

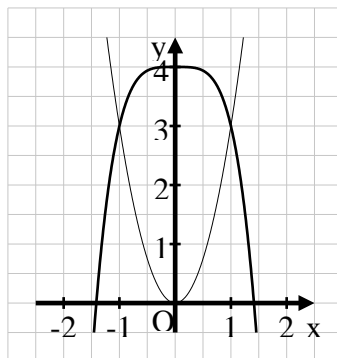
3) a) Skizze:



b) Bildung der Umkehrfunktion \bar{f} : $f(x) = y = \frac{6}{x} \rightarrow \bar{f}(y) = x = \frac{6}{y}$

$$\rightarrow V = \pi \cdot \int_3^{12} (\bar{f}(y))^2 dy = \pi \cdot \int_3^{12} \left(\frac{6}{y} \right)^2 dy = \pi \cdot \int_3^{12} \frac{36}{y^2} dy = \pi \cdot \left[-\frac{36}{y} \right]_3^{12} = \pi \cdot (-3 - (-12)) = 9\pi \approx 28,27 \text{ VE}$$

4) a) Skizze:



b) Schnittpunkte von f und g : $S_1(-1|3), S_2(1|3)$

Bildung der Umkehrfunktionen \bar{f} und \bar{g} :

$$f(x) = y = 4 - x^4 \rightarrow \bar{f}(y) = x = \sqrt[4]{4-y}; \quad g(x) = y = 3x^2 \rightarrow \bar{g}(y) = x = \sqrt{\frac{1}{3}y}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow V &= \pi \cdot \int_0^3 (\bar{g}(y))^2 dy + \pi \cdot \int_3^4 (\bar{f}(y))^2 dy = \pi \cdot \int_0^3 \left(\sqrt{\frac{1}{3}y} \right)^2 dy + \pi \cdot \int_3^4 (\sqrt[4]{4-y})^2 dy \\
 &= \pi \cdot \int_0^3 \frac{1}{3}y dy + \pi \cdot \int_3^4 \sqrt{4-y} dy = \pi \cdot \left[\frac{1}{6}y^2 \right]_0^3 + \pi \cdot \left[-\frac{2}{3} \cdot (4-y)^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 = \frac{3}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{13}{6}\pi
 \end{aligned}$$