

## Corona und das exponentielle Wachstum

Reinhard Bayer, Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung 22.03.2020

Die Fallzahlen der von Corona-infizierten Personen entwickeln sich in erster Näherung exponentiell. Doch vielen Menschen fehlt es an Vorstellungskraft für diesen Verlauf. Exponentielles Wachstum ist ein Pflichtstoff des Mathematikunterrichts des Gymnasiums. In diesem Artikel wird auf Schulniveau aufgezeigt, wie man exponentielles Wachstum „nachweist“ und wie man mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ein Modell und Zukunftsszenarien entwickeln kann.

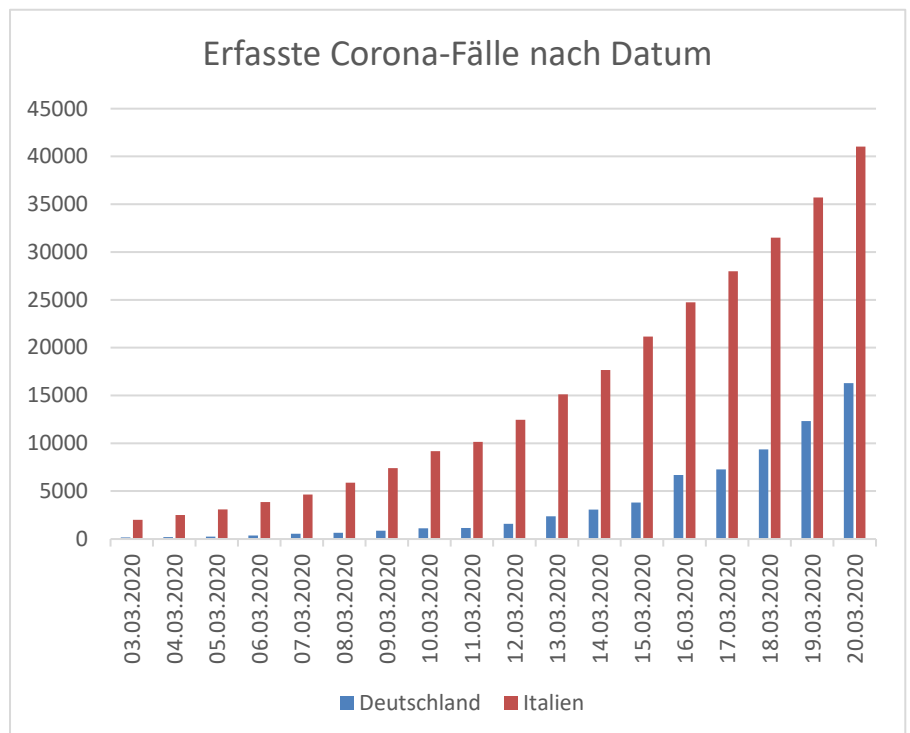
### Fallzahlen

Im Folgenden wurden die Fallzahlen von Deutschland und Italien genommen (Datenquelle Statista 2020, Stand 20.03.2020). Die Statistik beginnt erst ab einer Schwelle von 100 Personen.

**Aufgabe 1:** Am 20. März wurden in Deutschland ca. 16.000 Erkrankte gemeldet., in Italien ca. 41000. Kann man daraus schließen, dass der Verlauf in Italien grundsätzlich problematischer ist als in Deutschland?

a) Erstellen Sie ein vergleichendes Schaubild.

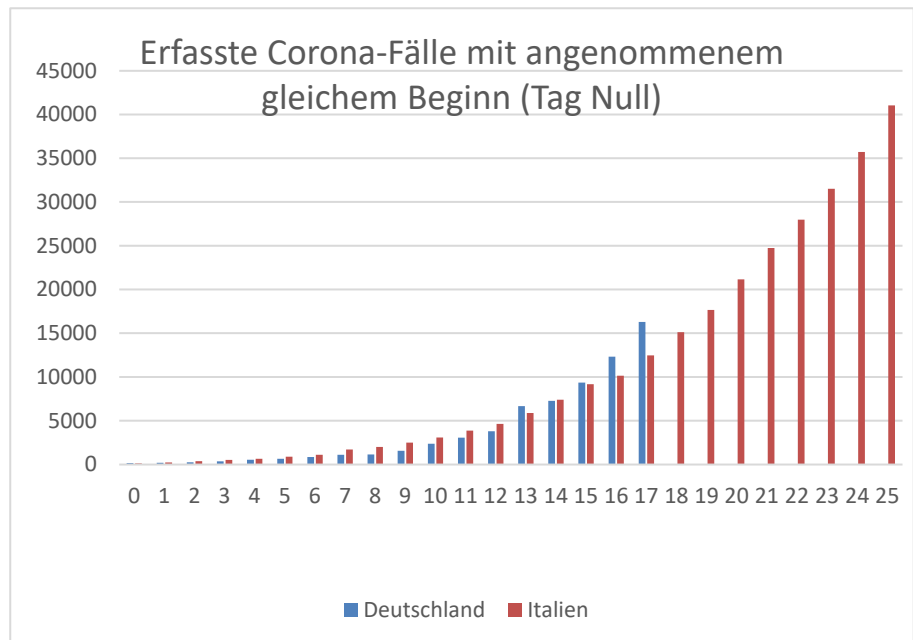
Datum	Deutschland	Italien
03.03.2020	150	2000
04.03.2020	188	2502
05.03.2020	240	3089
06.03.2020	349	3858
07.03.2020	534	4636
08.03.2020	639	5883
09.03.2020	847	7400
10.03.2020	1112	9172
11.03.2020	1139	10149
12.03.2020	1567	12462
13.03.2020	2369	15113
14.03.2020	3062	17660
15.03.2020	3795	21157
16.03.2020	6672	24747
17.03.2020	7272	27980
18.03.2020	9360	31506
19.03.2020	12327	35713
20.03.2020	16290	41035



Die Grafik zeigt, dass die Fallzahlen in Italien deutlich höher sind als in Deutschland. Doch woran kann das liegen?

- b) In der folgenden Tabelle wird die Zeitachse verschoben. Sowohl für Deutschland als auch für Italien ist der „Tag Null“ der Tag, an dem erstmals mehr als 100 Personen registriert wurden. Erstellen Sie ein vergleichendes Schaubild.

Tag	Deutschland	Italien
0	150	124
1	188	229
2	240	374
3	349	528
4	534	650
5	639	888
6	847	1100
7	1112	1700
8	1139	2000
9	1567	2502
10	2369	3089
11	3062	3858
12	3795	4636
13	6672	5883
14	7272	7400
15	9360	9172
16	12327	10149
17	16290	12462
18		15113
19		17660
20		21157
21		24747
22		27980
23		31506
24		35713
25		41035



Man sieht einen nahezu identischen Verlauf. Der erste Fall in Italien scheint in etwa eine Woche vor dem ersten Fall in Deutschland aufgetreten zu sein. Der Verlauf in Italien ist eine gute Prognose für die nächsten Tage in Deutschland.

Bei genauer Betrachtung könnte es in Deutschland sogar schlimmer kommen als in Italien (höhere Fallzahl ab Tag 13). Das wird nun genauer untersucht.

## Exponentielles Wachstum

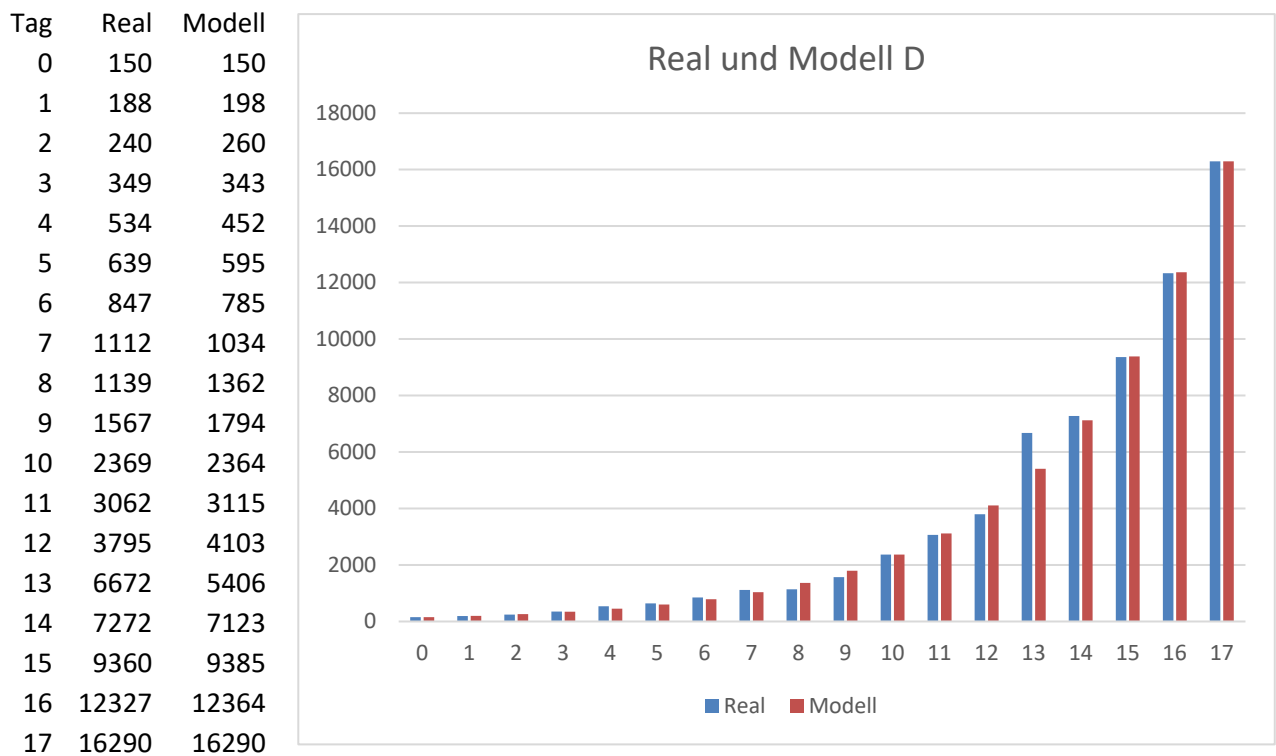
Lineares Wachstum ist leicht zu erkennen. Das Schaubild ergibt eine Gerade. Hier ist eine deutlich anwachsende Steigung zu erkennen, ein Kennzeichen exponentiellen Wachstums. Doch nicht jede ansteigende Kurve entspricht exponentiellem Wachstum. Wie kann man das überprüfen?

Ein exponentieller Verlauf folgt der Gleichung  $N(t) = N(0) \cdot a^t$ .

Die Basis  $a$  kann man durch den Logarithmus bestimmen:  $a = \exp((\ln N(t) / \ln N(0)) / t)$

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie  $a$  für Deutschland ( $t=17$ ) und für Italien ( $t=25$ ). Stellen Sie die Realdaten im Vergleich zu den Modelldaten in einer Tabelle und in einem Schaubild dar.

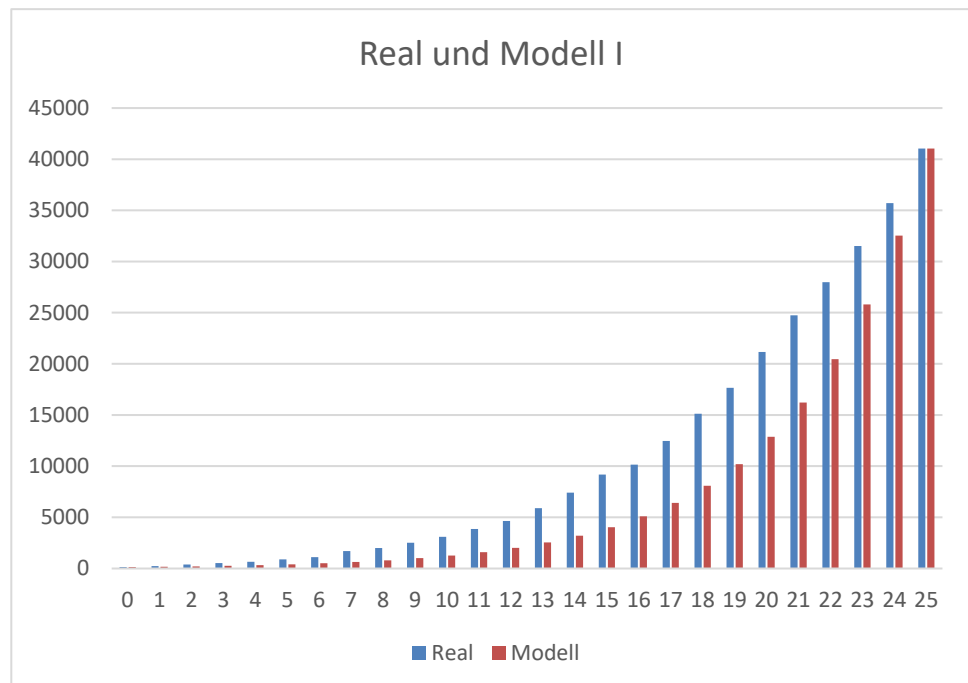
Deutschland  $a = 1,31751235$



Für Deutschland gibt es eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Realdaten und dem Modell.

Italien  $a = 1,26121553$

Tag	Real	Modell
0	124	124
1	229	156
2	374	197
3	528	249
4	650	314
5	888	396
6	1100	499
7	1700	629
8	2000	794
9	2502	1001
10	3089	1263
11	3858	1593
12	4636	2009
13	5883	2533
14	7400	3195
15	9172	4030
16	10149	5082
17	12462	6410
18	15113	8084
19	17660	10196
20	21157	12859
21	24747	16218
22	27980	20454
23	31506	25797
24	35713	32536
25	41035	41035



In Italien ist die Übereinstimmung mit dem Modell geringer.

Es kann sein, dass es sich nicht um exponentielles Wachstum handelt, es kann aber auch sein, dass die Berechnung der Basis  $a$  methodisch falsch war. Es ist bekannt, dass Meldungen über Fallzahlen unregelmäßig eingehen und auch die Erfassungsraten schwanken. Für die Berechnung der Basis  $a$  wurden nur  $N(0)$  und  $N(25)$  verwendet. Möglicherweise waren gerade diese beiden Werte sog. „Ausreißer“.

Es gibt eine Methode, Ausreißer zu identifizieren bzw. alle Werte in die Berechnung der Basis  $a$  einzubeziehen:

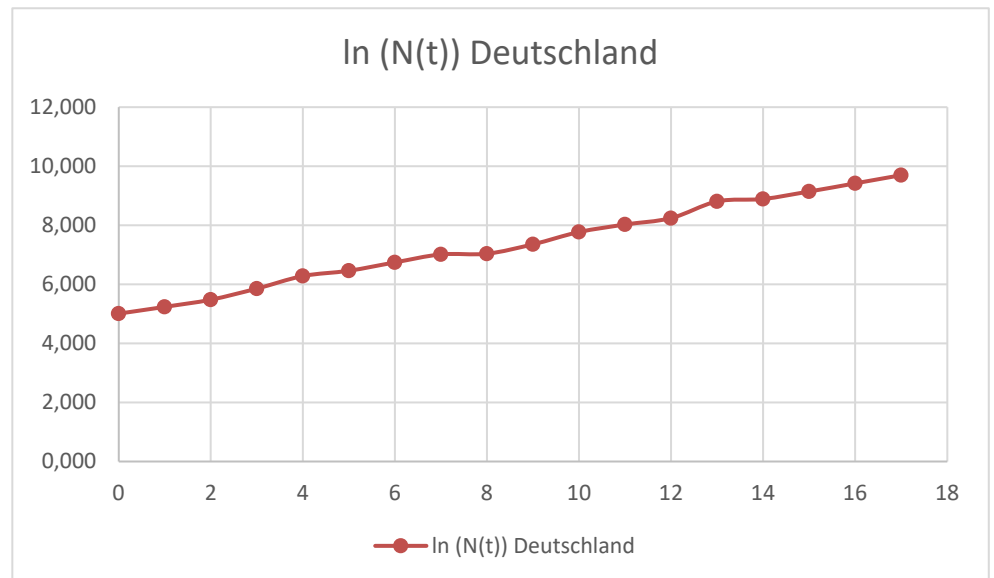
Nimmt man den Logarithmus von  $N(t) = N(0) * a^t$ , dann erhält man

$$\ln(N(t)) = \ln(N(0)) + \ln(a) * t$$

Dies ist eine Geradengleichung, die Steigung ist  $\ln(a)$ .

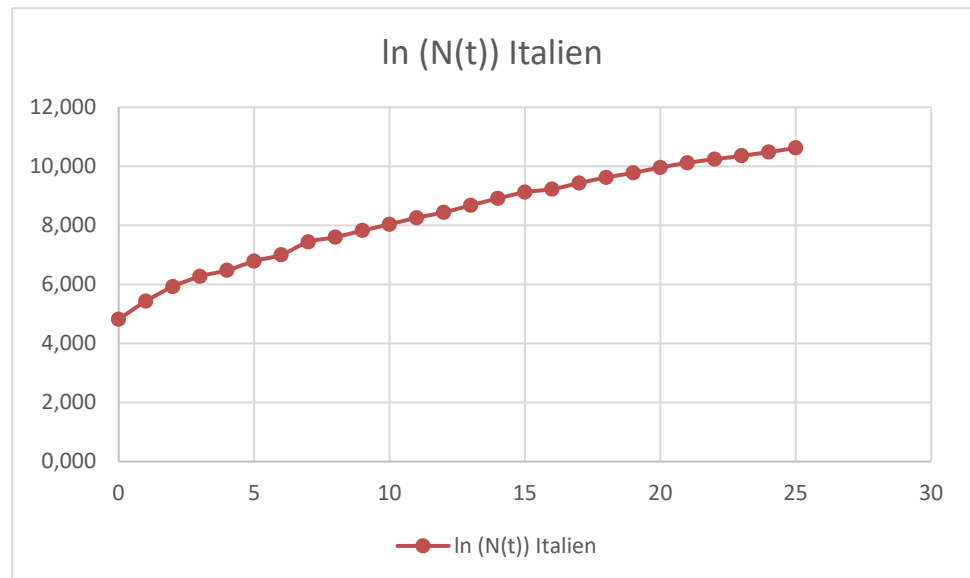
**Aufgabe 3:** Erstellen Sie eine Tabelle mit dem Logarithmus der Fallzahlen und stellen Sie die Werte in einem Schaubild dar.

Tag	Deutschland	$\ln(N(t))$
0		5,011
1		5,236
2		5,481
3		5,855
4		6,280
5		6,460
6		6,742
7		7,014
8		7,038
9		7,357
10		7,770
11		8,027
12		8,241
13		8,806
14		8,892
15		9,144
16		9,420
17		9,698



Für Deutschland ist gut zu erkennen, dass die Werte mit nur kleinen Abweichungen um eine Gerade pendeln. Es handelt sich um exponentielles Wachstum.

Tag	$\ln(N(t))$ Italien
0	4,820
1	5,434
2	5,924
3	6,269
4	6,477
5	6,789
6	7,003
7	7,438
8	7,601
9	7,825
10	8,036
11	8,258
12	8,442
13	8,680
14	8,909
15	9,124
16	9,225
17	9,430
18	9,623
19	9,779
20	9,960
21	10,116
22	10,239
23	10,358
24	10,483
25	10,622

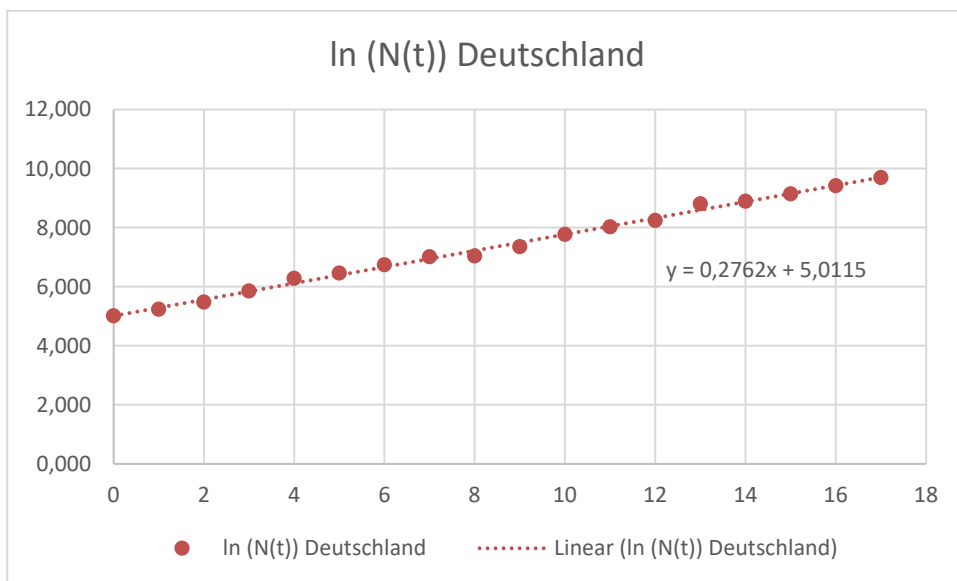


Für Italien handelt es sich nur annähernd um eine Gerade. Die Kurve ist zu Beginn steiler und flacht dann ab. Es handelt sich nicht durchgängig um eine Exponentialfunktion. Eine mögliche Erklärung ist die Einführung von Maßnahmen, die das Wachstum verändert. Die Abweichung von einer Geraden scheint gering zu sein, hat aber bei exponentiellem Wachstum gravierende Bedeutung. Diese optisch kleine Abflachung entspricht langfristig einem Unterschied Hunderdtausender von möglichen Infizierten. Das wird später wieder aufgegriffen.

### Modellbildung

In Deutschland haben die einschränkenden Maßnahmen bis zum 20.3.2020 noch nicht getroffen. Die Fallzahlen zeigen nahezu idealtypisches exponentielles Wachstum. Das kann als Hochrechnung für Prognosen genommen werden. Die Berechnung der Basis  $a$  soll dafür noch verfeinert werden. Hierzu wird die Steigung der Geraden in der logarithmischen Darstellung durch lineare Regression genauer bestimmt.

**Aufgabe 4:** Erstellen Sie aus den Realdaten für Deutschland eine Ausgleichsgerade (in Excel „Trendlinie“) und bestimmen Sie  $a$  und  $N(0)$ .

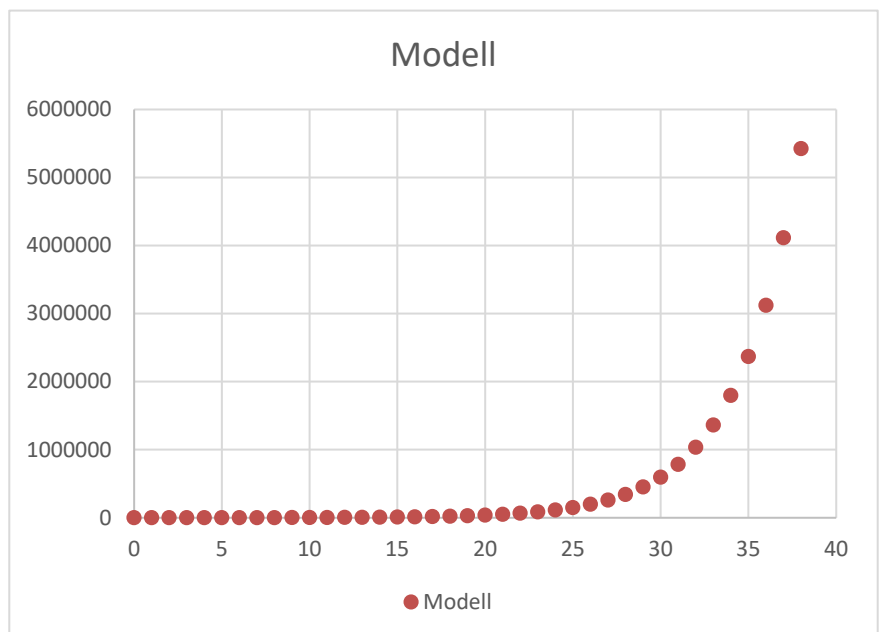


Excel kann die angepasste Geradengleichung bestimmen.

Daraus ergibt sich  $a = \exp(0,2762) = 1,31811146$  und  $N(0) = \exp(5,0115) = 150$

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie mit den neuen Modelldaten den Verlauf der nächsten 20 Tage.

Datum	Tag	Real	Modell
03.03.2020	0	150	150
04.03.2020	1	188	198
05.03.2020	2	240	261
06.03.2020	3	349	344
07.03.2020	4	534	453
08.03.2020	5	639	597
09.03.2020	6	847	787
10.03.2020	7	1112	1037
11.03.2020	8	1139	1367
12.03.2020	9	1567	1802
13.03.2020	10	2369	2375
14.03.2020	11	3062	3130
15.03.2020	12	3795	4126
16.03.2020	13	6672	5438
17.03.2020	14	7272	7168
18.03.2020	15	9360	9449
19.03.2020	16	12327	12454
20.03.2020	17	16290	16416
21.03.2020	18		21639
22.03.2020	19		28522
23.03.2020	20		37595
24.03.2020	21		49555
25.03.2020	22		65319
26.03.2020	23		86097
27.03.2020	24		113486
28.03.2020	25		149587
29.03.2020	26		197173
30.03.2020	27		259896
31.03.2020	28		342571
01.04.2020	29		451547
02.04.2020	30		595190
03.04.2020	31		784526
04.04.2020	32		1034093
05.04.2020	33		1363050
06.04.2020	34		1796652
07.04.2020	35		2368187
08.04.2020	36		3121535
09.04.2020	37		4114531
10.04.2020	38		5423410



Bei ungebremstem exponentiellem Verlauf übersteigen die Fallzahlen innerhalb einer Woche 100.000, nach einer weiteren Woche sind es 1.000.000.

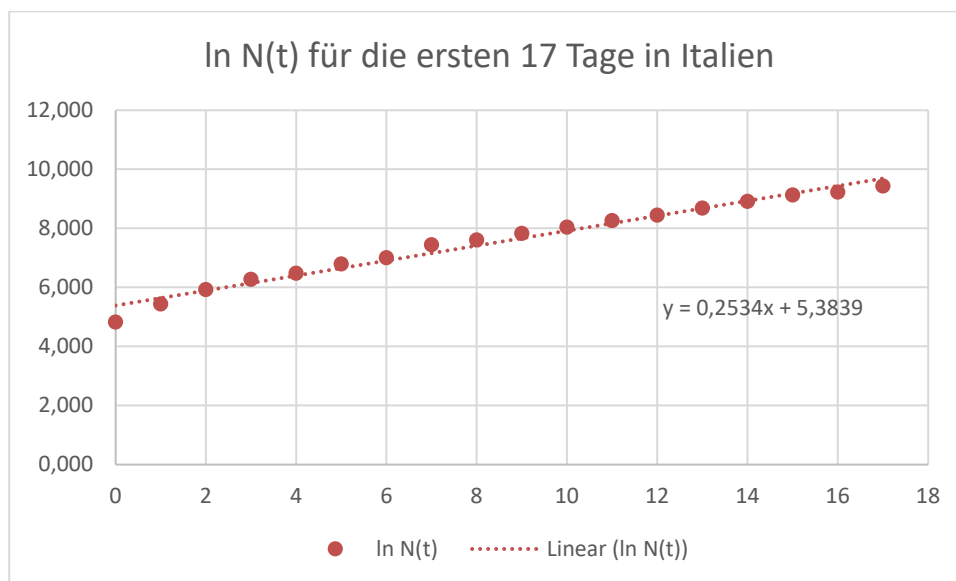


## Es gibt Hoffnung

Kommen wir zurück nach Italien, das ein paar Tage früher als Deutschland Maßnahmen zur Verminderung von Kontakten eingeführt hat. Es wurde bereits gezeigt, dass in Italien die Fallzahlen nicht durchgängig exponentiell mit einer einheitlichen Basis  $a$  anwachsen. Ob das tatsächlich mit der Wirkung von Maßnahmen zu tun hat, kann mit dem Modell nicht bewiesen werden. Aber Modelle basieren auf gedanklichen Ansätzen (Hypothesen), die manchmal verworfen müssen und die manchmal auf Basis des Datenmaterials nicht verworfen werden können, also vorläufig so aufrechterhalten werden können.

Teilen wir doch die Phasen auf: Angenommen (Hypothese!), wir hätten exponentielles Wachstum mit der Basis  $a_1$  vor den Maßnahmen und mit der Basis  $a_2$  nach den Maßnahmen. Lassen sich aus den Daten in Italien Unterschiede ableiten und wie wirkt sich das auf Prognosen aus – unter der Annahme gleicher Wirkung von Maßnahmen in Deutschland?

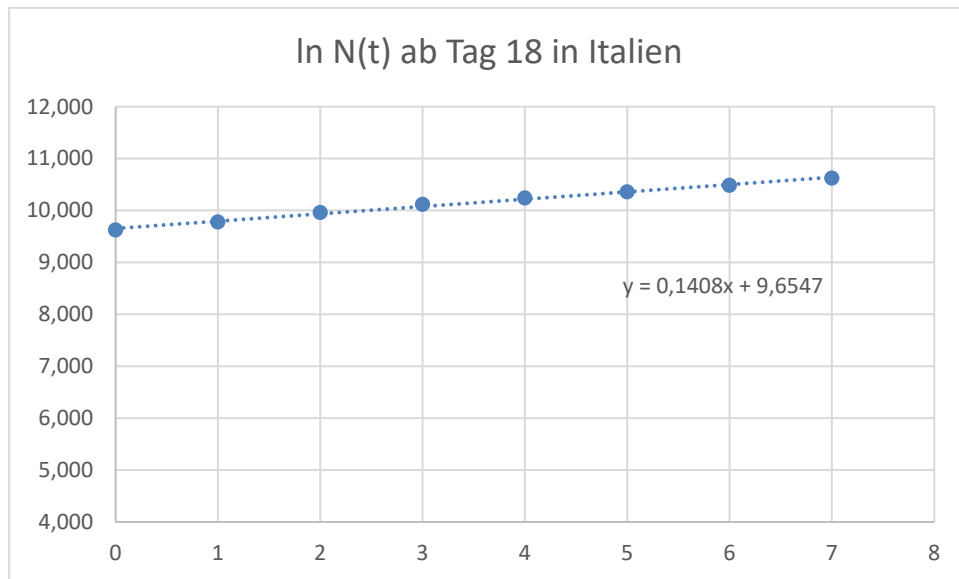
**Aufgabe 6:** Bestimmen Sie aus den Italien-Daten  $N(0)$  bis  $N(17)$  die Basis  $a_1$  und aus den Daten  $N(18)$  bis  $N(25)$  die Basis  $a_2$ .



Es zeigt sich, dass die Anfangsphase auch in diesem verfeinerten Modell noch nicht einem idealen exponentiellen Wachstum entspricht. Auch scheinen die ersten beiden Daten Ausreißer zu sein – natürlich nur bezogen auf dieses vereinfachte Modell. Die Hypothese exponentiellen Wachstums in der Anfangsphase lässt sich mit den Daten nicht bestätigen. Was nicht heißt, dass die Hypothese falsch ist, es kann auch an der Datenlage liegen.

Wichtiger für die weiteren Überlegungen ist jedoch der hintere Zeitraum. Die Datenlage scheint verlässlicher. Hier liegen die Werte sehr gut auf einer Geraden, es handelt sich um exponentielles Wachstum.

In Italien ist die Basis  $a_2$  für das exponentielle Wachstum nur  $a_2 = \exp(0,1408) = 1,15119439$ . Zum Vergleich: Deutschland hat im gleichen Zeitraum (vor dem 20.3.2020) exponentielles Wachstum mit der Basis  $a = 1,31811146$ .



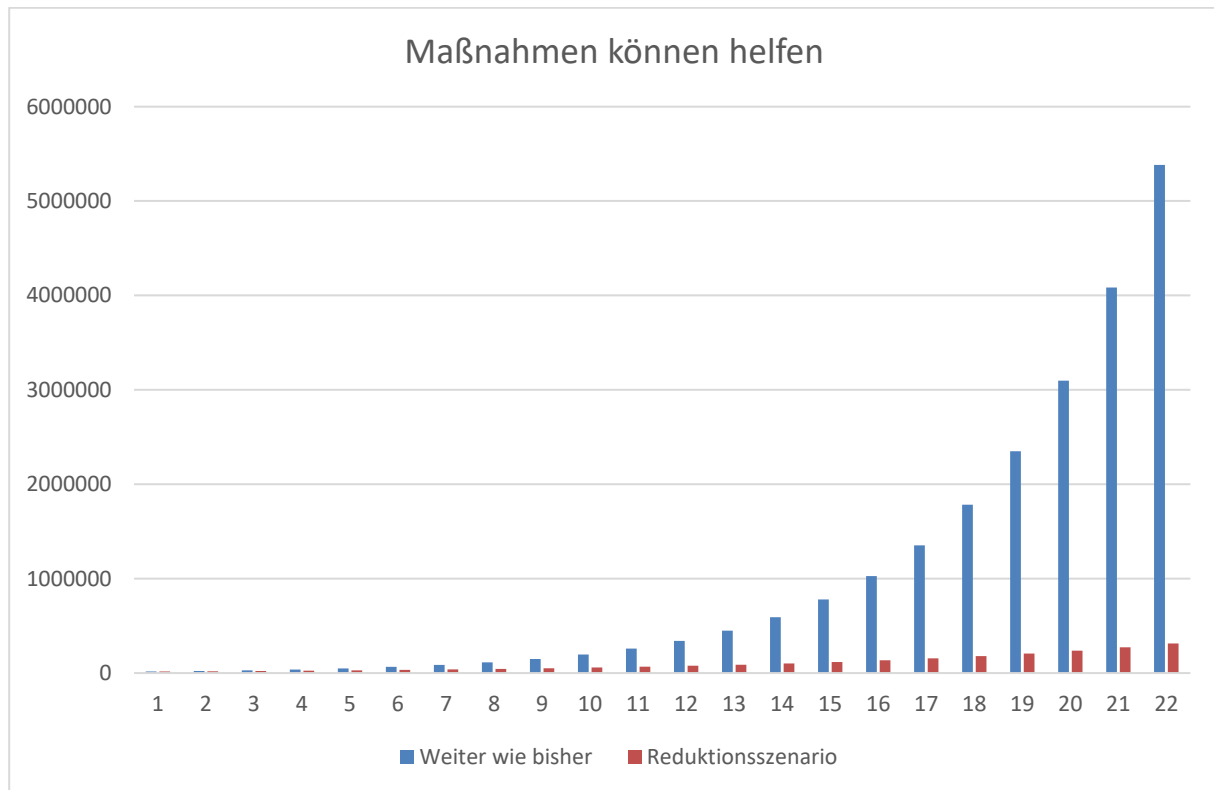
**Aufgabe 7:** Angenommen, man kann durch die Maßnahmen zur Eindämmung die Wachstumsrate auch in Deutschland das exponentielle Wachstum auf das Niveau von Italien (Basis a2) senken.

Vergleichen Sie in einer Tabelle und als Schaubild die beiden Prognosen für Deutschland „Weiter wie bisher“ und „Reduktionsszenario“.

Datum	Tag	Weiter wie bisher	Reduktionsszenario
20.03.2020	0	16290	16290
21.03.2020	1	21472	18753
22.03.2020	2	28303	21588
23.03.2020	3	37306	24852
24.03.2020	4	49173	28610
25.03.2020	5	64816	32936
26.03.2020	6	85435	37915
27.03.2020	7	112612	43648
28.03.2020	8	148436	50247
29.03.2020	9	195655	57844
30.03.2020	10	257895	66590
31.03.2020	11	339934	76658
01.04.2020	12	448071	88248
02.04.2020	13	590607	101591
03.04.2020	14	778486	116951
04.04.2020	15	1026132	134633
05.04.2020	16	1352556	154989
06.04.2020	17	1782820	178422
07.04.2020	18	2349955	205398
08.04.2020	19	3097503	236453
09.04.2020	20	4082854	272204
10.04.2020	21	5381656	313360

Im Modell „Weiter so“ sind am 7. Tag 100.000 infiziert (und registriert) im Reduktionsmodell nach 13 Tagen. Gibt es im Modell „Weiter so“ in 20 Tagen über 4 Millionen Infizierte, so sind es im Reduktionsmodell noch weniger als 300.000.

Das Reduktionsszenario ist realistisch (Wachstumsrate analog zur aktuellen Lage in Italien) und kann möglicherweise noch weiter verbessert werden.



## Fazit

Bitte beachten Sie, dass die hier entwickelten Modelle rein mathematischer Natur sind. Medizinische Grundlagen spielten keine Rolle. Verblüffend ist die außergewöhnliche Übereinstimmung der Datenlage mit einem Modell des exponentiellen Wachstums in Deutschland. Und das trotz der Dunkelziffer, Nichtberücksichtigung von Genesenen und Verstorbenen und vielen weiteren Unsicherheiten.

Natürlich kann man das Modell weiter ausbauen – und vor allen Dingen täglich mit neuen Daten erweitern und überprüfen.

Die Aufgaben sind mit Lösungen abgedruckt, ohne Erklärungen, wie das mit einem Tabellenkalkulationsprogramm umgesetzt werden kann. Mit einigen Grundkenntnissen und Hilfsfunktionen müsste man aber zurechtkommen.

Wer die Idee mit seinen Schülerinnen und Schülern als Projekt aufgreifen möchte, findet jederzeit neue Daten und erhält mit großer Wahrscheinlichkeit auch andere Prognosen. Das ist normal in der Modellbildung. Und es geht hier nicht darum, verlässliche Entwicklungen vorzugaukeln – das kann wohl momentan niemand – sondern die Methoden aufzuzeigen, mit denen man vorgehen kann.

Und noch etwas kann man lernen: Exponentielles Wachstum beginnt harmlos und „explodiert“ förmlich. Umgekehrt kann aber auch eine kleine Änderung im Anfangsstadium große Auswirkungen in der Zukunft haben. Also: Macht das a schnellstmöglich klein.