cosh cooperation schule:hochschule

ZSL Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

in vielen Studienbereichen gehören mathematische Vorlesungen zum Pflichtbereich. Der vorliegende Stationenlauf ist als eine Art „mathematischer Check-in“ für das Studium gedacht. Ziel ist es, an Beispielen aus der Schulmathematik aufzuzeigen, in welchen Bereichen die Anforderungen der Hochschulen an Studienanfänger bereits erfüllt sind und wo eventuell Kenntnisse erweitert oder aufgefrischt werden sollten. Grundlage dazu ist der sogenannte **cosh-Mindestanforderungskatalog** (***www.cosh-mathe.de***). Die mit […] gekennzeichneten Aufgaben sind von dort entnommen (ggf. leicht verändert).

Übersicht über die Stationen

Station	Thema	bearbeitet
1	**Gleichungen**	
2	**Lineare Gleichungssysteme**	
3	**Bruchrechnen**	
4	**Bruchgleichungen**	
5	**Terme und Variablen**	
6	**Potenzen und Wurzeln**	
7	**Differenzialrechnung**	
8	**Eigenschaften von Funktionen**	
9	**Begründen und Beweisen**	
10	**Stolpersteine**	

Falls Sie in einem Aufgabengebiet nicht mehr „fit“ sind, so können Sie, neben Ihrem Schulbuch, im Internet Erklärungen, Tutorials etc. finden.

Auch die Hochschulen bieten zu den aufgeführten Themen Einführungskurse und vertiefende Aufgaben an. Diese sind zum Beispiel zu finden unter

www.brueckenkurs-mathematik.de

www.ombplus.de

Viel Erfolg für den Start ins Studium!

Station 1: Gleichungen

Ich kann...	☺	☹
… quadratische Gleichungen lösen. a) $x^2 - 144 = 0$ b) $2x^2 - 2 = 3 - 8x$		
… Gleichungen durch Faktorisieren lösen. a) $2x^2 + 3x = 0$ b) $(\sin(x))^2 + \frac{3}{2}\sin(x) = 0$ c) $\sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) = 0$		
… Gleichungen durch Substitution lösen. a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ [41b] b) $e^{2x} - 13e^x + 36 = 0$		
… eine geeignete Methode zum Lösen von Gleichungen auswählen und durchführen. a) $e^{-2x} - 4 = 0$ b) $2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$ [41a] c) $\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x} = 0$ d) $x^6 - x^2 = 0$ e) $(x-1) \cdot (x^2+1) = 0$		

Station 2: Lineare Gleichungssysteme

Ich kann...	☺	☹
… ein lineares Gleichungssystem mit bis zu 3 Gleichungen und 3 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen; z. B. mit dem Gauß-Verfahren. Bestimmen Sie die Lösung. $\begin{array}{lrrrl} (I) & -x_1 + & 7x_2 - & x_3 & = 5 \\ (II) & 4x_1 - & x_2 + & x_3 & = 1 \\ (III) & 5x_1 - & 3x_2 + & x_3 & = -1 \end{array}$		
… die Lösbarkeit in einfachen, offensichtlichen Fällen erkennen, ohne ein Rechenverfahren anzuwenden. Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. $\begin{array}{lrrrl} (I) & -x_1 - & x_2 - & x_3 & = 5 \\ (II) & 4x_1 - & x_2 + & x_3 & = 1 \\ (III) & x_1 + & x_2 + & x_3 & = -1 \end{array}$		
… die Lösbarkeit einfacher Gleichungssysteme auch mit Parametern diskutieren. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter *r*. $\begin{array}{lrrrl} (I) & x_1 + & x_2 + & x_3 & = 18 \\ (II) & x_1 + & x_2 - & 2x_3 & = 0 \\ (III) & x_1 + & x_2 - & x_3 & = r \end{array}$ vgl. [88]		
… ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren. Zeichnen Sie die beiden Geraden *g* und *h* in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie dann den Schnittpunkt der beiden Geraden und überprüfen Sie damit Ihre Zeichnung. $\begin{array}{lrrl} g: & 2x_1 + & x_2 & = 1 \\ h: & x_1 - & x_2 & = 3 \end{array}$ vgl. [90]		

Station 3: Bruchrechnen

Ich kann…	☺	☹
… Brüche vereinfachen. a) $\frac{27}{9}$ b) $\frac{121}{55}$ c) $\frac{\frac{8}{x}}{x^2}$ d) $\frac{(x+1)\cdot x^2}{2(x+1)^2}$		
… spezielle Terme <u>in einem Schritt</u> vereinfachen. a) $\frac{13}{18}\cdot 9$ b) $\frac{3}{7}:2$ c) $\frac{8}{5}:2$ d) $13a\cdot\frac{8}{169\cdot a^2}$		
… Terme geschickt vereinfachen. a) $\frac{1}{21}-\frac{6}{7}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{12}{8}+2$ c) $\frac{7}{9}\cdot\frac{81}{14}$ d) $\frac{1}{x+1}+x-1$ vgl. [29] e) $\frac{a+b}{a-b}\cdot(a^2-b^2)$ f) $\frac{4ab+6a}{2(b+1)+1}$ vgl. [22b]		
… Doppelbrüche berechnen und vereinfachen. a) $\frac{\frac{18}{5}}{\frac{6}{15}}$ b) $\frac{\frac{4}{a}}{a^{-3}}$ c) $\frac{4\cdot\frac{7}{12}}{\frac{21}{6}\cdot 8}$		

Station 4: Bruchgleichungen

Ich kann...	☺	☹
… die Lösungsmenge von Bruchgleichungen bestimmen. a) $\frac{2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x}$, wobei $x \neq 0$ b) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x-4}{x+2}$, wobei $x \neq -2; -3$ c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$ d) $x + \frac{10}{x} = -2$, wobei $x \neq 0$		
… Bruchgleichungen mit Parametern bearbeiten. Für $x \neq 0$ und $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist die folgende Gleichung gegeben: $x + \frac{a}{x} = -6$ Bestimmen Sie a so, dass die Gleichung zwei ganzzahlige Lösungen besitzt.		
… Aussagen über die Lösungsmenge von Bruchgleichungen treffen. Begründen Sie <u>ohne zu rechnen</u>, dass die Gleichung keine positiven Zahlen als Lösung haben kann: $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} + 1$, wobei $x \neq -2; -3$		

Station 5: Terme und Variablen

<table>
<tr><th>Ich kann…</th><th>☺</th><th>☹</th></tr>
<tr><td>

… Terme vereinfachen und zusammenfassen.

a) Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich:
$a^3 - a(3-a)^2 - (2a-9)a$

b) Fassen Sie den Ausdruck zusammen: [35]
$x^2 \cdot x^4 + \frac{x^8}{x^2} + (x^2)^3 + x^0$

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

… Gleichungen mit Formvariablen lösen.

a) Zeigen Sie: Die Gleichung $6x^2 + (3a-2b)x - ab = 0$ ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ lösbar.

b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Gleichung genau eine Lösung hat?

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

… Gleichungen mit Realitätsbezug nach einer Variablen auflösen.

a) Die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels der Länge l lässt sich bei nicht zu großen Auslenkungen mit Hilfe der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnen. Gibt man die Länge l vor und misst die Schwingungsdauer T, lässt sich hieraus der Wert des Ortsfaktors g bestimmen. Lösen Sie obige Gleichung nach g auf.

b) Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1, R_2 gilt:
$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. vgl. [28a]
Lösen Sie die Gleichung nach R bzw. nach R_1 oder R_2 auf.

</td><td></td><td></td></tr>
</table>

cosh cooperation schule:hochschule

ZSL Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg

Station 6: Potenzen und Wurzeln

Ich kann...	☺	☹
… Potenzen mit gleichen Basen zusammenfassen. a) $x^2 \cdot x^4 + x^2 \cdot x^{-4}$ vgl. [35] b) $\frac{x^n}{x^{n+1}} \cdot x^2$		
… Potenzen mit gleichen Exponenten zusammenfassen. a) $(3a)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2$ b) $(x+3)^a \cdot (2x)^a$ c) $(5x)^3 + x^3$		
… Potenzen potenzieren. a) $(a^2 \cdot b^{-3})^2$ b) $\left(\frac{x \cdot y^4}{z^3}\right)^{-2}$		
… Terme mit Wurzeln zusammenfassen. a) $\sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$ b) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$ vgl. [36]		
… die Rechengesetze für Potenzen anwenden. a) Schreiben Sie ohne Klammern: $(2a+b)^2$ und $(2a \cdot b)^2$ b) $a^3 \cdot a^4 - 8 \cdot (a^2)^6 + (2a^3)^4 + \frac{a^{12}}{a^5}$ c) $b^6 a^6 - (ab)^2 \cdot [(ba)^4 - (b+a)^2] + b^8 a^8$ d) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$		

Station 7: Differenzialrechnung

Ich kann...	☺	☹

... Funktionen ableiten.

Geben Sie jeweils die Ableitungsfunktion an.

a) $f(x) = x^3 - 6x - 4$ vgl. [75a]

b) $f(x) = \ x \cdot \mathrm{e}^{2x}$ [75d]

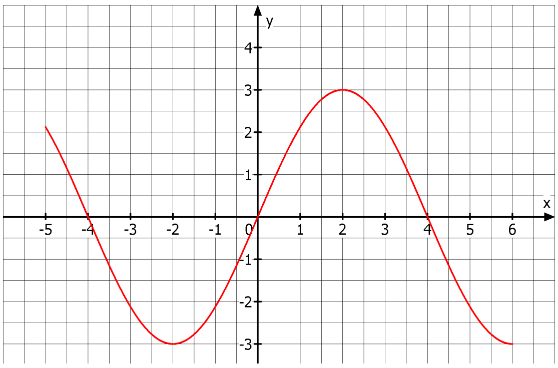
c) $f(x) = 2 \cdot \sin(\pi x)$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin(x)$ [75e]

e) $f(x) = \mathrm{e}^5$ [75b]

... mit Hilfe der Ableitung einer Funktion Aussagen über ihr Schaubild treffen.

Die Abbildung zeigt für $-5 \leq x \leq 6$ das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. vgl. [73]



Richtig oder falsch? Entscheiden und begründen Sie.

a) Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum.

b) Für $-2 < x < 2$ ist die Funktion f streng monoton wachsend.

c) Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ eine Wendestelle.

... Funktionen mit Hilfe der Differenzialrechnung untersuchen.

Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f mit vgl. [76]

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte .

In welchem Bereich ist das Schaubild von f linksgekrümmt?

Station 8: Eigenschaften von Funktionen

Ich kann...	☺	☹
... Definitions- und Wertemengen angeben. Geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge folgender Funktionen an: vgl. [62] a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f_2(x) = 1 + e^{-x}$ c) $f_3(x) = \sqrt{1-x}$ d) $f_4(x) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$		
... die Wirkung von Parametern in Funktionstermen beurteilen. Welche Bedingung muss jeweils an d gestellt werden, damit die Funktion mindestens eine Nullstelle besitzt. $f_1(x) = x^d + 2$ $f_2(x) = d\sin(x) + 2$ $f_3(x) = d - e^{2x}$ $f_4(x) = \frac{1}{x+d} - 2$		
... Graphen von Funktionen skizzieren. a) $f_1(x) = (x-1)^2(x+2)(x-3)$ b) $f_2(x) = -(x-1)^2(x+2)(x-3)$ c) $f_3(x) = \sin(x+2)$ [66e] d) $f_4(x) = 1 + \sqrt{x}$		
... ausgehend vom Term Rückschlüsse auf Eigenschaften der Funktion ziehen. Begründen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ mindestens eine Nullstelle besitzen muss.		

Station 9: Begründen und Beweisen

Ich kann...	☺	☹
… algebraische Aussagen begründen oder widerlegen. a) Sei $a, b \neq 0$. Begründen Sie, dass im Allgemeinen die Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ nicht gilt. b) Gegeben sei $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $a, b, c > 0$. Begründen Sie, dass a die kleinste der drei Zahlen ist.		
… mathematische Begriffe mit Worten erklären. Erklären Sie, was man unter der *Wurzel einer Zahl x* versteht.		
… Rechenregeln herleiten. Leiten Sie aus der Potenzregel $\mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{u+v}$ die Logarithmusregel $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ her.		
… trigonometrische Zusammenhänge mit Hilfe des Einheitskreises begründen. a) Begründen Sie, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ nur einen Punkt P auf dem Einheitskreis gibt, für den gilt: $\cos(\alpha) = 0{,}8$. vgl. [61c] b) Erläutern Sie, dass für alle Winkel α gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$. [61d]		

Station 10: Stolpersteine

Ich kann typische Fehler erkennen und korrigieren*…	☺	☹
… bei Aufgaben zu Potenzen. a) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$ b) $9^{-\frac{1}{2}} = -4{,}5$		
… bei Aufgaben zu Logarithmen. a) $\log_4(1) = 4$ b) $\ln\left(\frac{e^5}{\sqrt{e}}\right) = 10$		
… bei Aufgaben zu Wurzeln. a) $\frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{10}$ b) $\sqrt{16a^4 + 4a^2b^2} = 4a^2 + 2ab$		
… bei Aufgaben zu Bruchtermen. a) $\frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x^2}$ b) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x} = \frac{x^3+4+4x}{2x} = x^3 + 6$		
… bei Aufgaben zu Ableitungen. a) $f(x) = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x \cdot e^{-2x-1}$ b) $g(x) = 2x \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2 \cdot \cos(x)$		

*Anleitung:
Versuchen Sie jeweils anzugeben, welcher Fehler beim dargestellten Ergebnis gemacht wurde und korrigieren Sie ihn.

Lösung: Station 1

Ich kann...

… quadratische Gleichungen lösen.

a) $x^2 = 144, \; x_{1,2} = \pm 12$

b) $2x^2 + 8x - 5 = 0, \; x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{4} = -2 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$

… Gleichungen durch Faktorisieren lösen.

a) $2x^2 + 3x = x(2x+3) = 0, \;\; x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $(\sin(x))^2 + \frac{3}{2}\sin(x) = \sin(x)\left(\sin(x) + \frac{3}{2}\right) = 0$

$\sin(x) = 0 \; \mathit{für} \; x = n\pi$, wobei $n \in \mathbb{Z}$

$\sin(x) + \frac{3}{2}$ wird nie Null, da $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) $\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = \sin(x)\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0,$

$\sin(x) = 0 \; \mathit{für} \; x = n\pi$ oder $\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0$ für $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi,$ wobei $n \in \mathbb{Z}$

… Gleichungen durch Substitution lösen.

a) $x^2 = u$: $\; u^2 - 13u + 36 = 0, \; u_1 = 4, \; u_2 = 9$. Damit $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_{3,4} = \pm 3$.

b) $e^x = u$: $\; u^2 - 13u + 36 = 0, \; u_1 = 4, \; u_2 = 9$. Damit $x_1 = \ln(4)$ und $x_2 = \ln(9)$.

… eine geeignete Methode zum Lösen von Gleichungen auswählen und durchführen.

a) nach x auflösen: $x = -\frac{1}{2}\ln(4)$.

b) Faktorisieren: $2e^{-2x} - 5e^{-x} = e^{-x}(2e^{-x} - 5) = 0,$

Lösung: $x = -\ln(2{,}5)$

c) $\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x} = 0 \qquad | \cdot x^2$

$2 - 5x = 0 \qquad | + 5x$

$2 = 5x$ Lösung: $x = 0{,}4$.

d) Faktorisieren: $x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = 0,$

$x_1 = 0, \;\; x_{2,3} = \pm 1.$

e) Lösungen ablesen (Nullprodukt): $x = 1$. Die zweite Klammer ist im Reellen stets positiv.

Lösung: Station 2

Ich kann...

... ein lineares Gleichungssystem [...] ohne Hilfsmittel lösen.

Lösung: Durch z. B. (I)+(II) und (I)+(III) ergibt sich $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$

... die Lösbarkeit in einfachen, offensichtlichen Fällen erkennen [...].

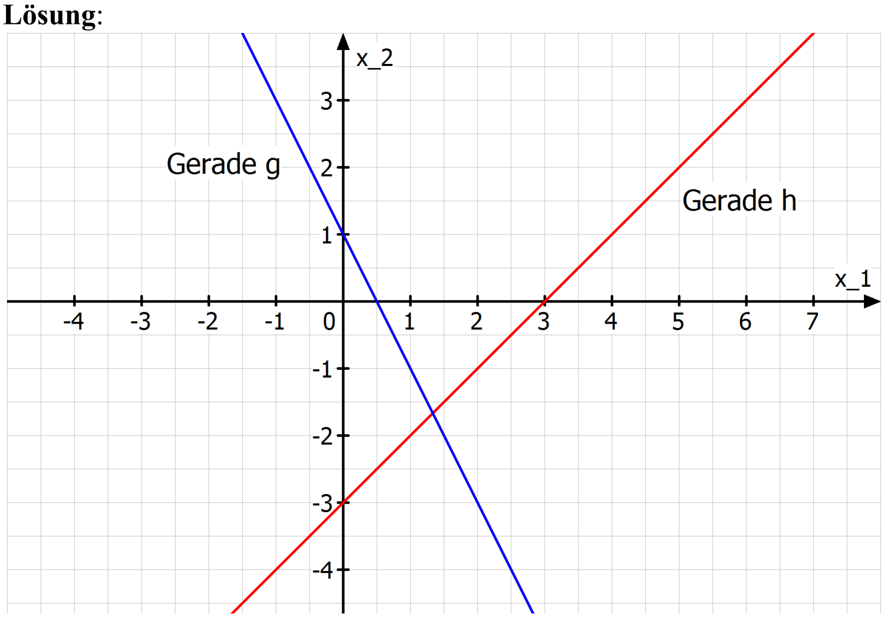
Lösung: Das LGS hat keine Lösung, da die linken Seiten der ersten und dritten Zeile Vielfache voneinander sind, die rechte Seite jedoch nicht (mit demselben Faktor).

... die Lösbarkeit [...] auch mit Parametern diskutieren.

Lösung: Es ergibt sich aus der ersten und zweiten Gleichung $x_3 = 6$.
Damit erhält man das reduzierte System
$x_1 + x_2 = 12$
$x_1 + x_2 = 6 + r$
Wenn $r = 6$, hat das LGS unendlich viele Lösungen (dann gilt L={(t; 12-t; 6)} mit reellem Parameter t), ansonsten ist es nicht lösbar.

... ein lineares Gleichungssystem [...] interpretieren.

Lösung:



Die Lösung $\left(\frac{4}{5}; \frac{-5}{3}\right)$ ist als Schnittpunkt erkennbar.

Lösung: Station 3

Ich kann…

… Brüche vereinfachen.

a) 3 b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{8}{x^3}$ d) $\frac{x^2}{2(x+1)}$

… spezielle Terme in einem Schritt vereinfachen.

a) $\frac{13}{9\cdot 2}\cdot 9=\frac{13}{2}$ b) $\frac{3}{7\cdot 2}=\frac{3}{14}$ c) $\frac{8}{5}:2=\frac{4\cdot 2}{5}:2=\frac{4}{5}$

d) $13a\cdot\frac{8}{169a^2}=13a\cdot\frac{8}{(13a)^2}=\frac{8}{13a}$

… Terme geschickt vereinfachen.

a) $\frac{1}{21}-\frac{6}{7}=-\frac{17}{21}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{12}{8}+2=4\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{9}\cdot\frac{81}{14}=\frac{7}{9}\cdot\frac{9\cdot 9}{2\cdot 7}=\frac{9}{2}$

d) $\frac{1}{x+1}+x-1=\frac{1+x(x+1)-1(x+1)}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$

e) $\frac{a+b}{a-b}\cdot(a^2-b^2)=\frac{a+b}{a-b}\cdot(a+b)\cdot(a-b)=(a+b)^2$ f) $\frac{4ab+6a}{2(b+1)+1}=\frac{2a\cdot(2b+3)}{2b+2+1}=2a$

… Doppelbrüche berechnen und vereinfachen.

a) $\frac{18}{5}\cdot\frac{15}{6}=\frac{3\cdot 6}{5}\cdot\frac{3\cdot 5}{6}=9$ b) $\frac{\frac{4}{a}}{\frac{1}{a^3}}=\frac{4}{a}\cdot a^3=4a^2$

c) $\frac{4\cdot\frac{7}{12}}{\frac{21}{2\cdot 3}\cdot 2\cdot 4}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{21}{3}}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{21}=\frac{7}{3\cdot 4}\cdot\frac{3}{7\cdot 3}=\frac{1}{12}$

Lösung: Station 4

Ich kann...

… die Lösungsmenge von Bruchgleichungen bestimmen.

a) $L = \{-2; 1\}$
Lösungsweg: Multiplikation der Gleichung mit x^2 (da $x \neq 0$) führt zu einer quadratischen Gleichung; Lösung mit der Mitternachtsformel.

b) $L = \{-5\}$
Lösungsweg: Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x+3) \cdot (x+2)$ und anschließendes Auflösen der Klammern führt zu der Gleichung $2x = -10$.

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Lösungsweg: Multiplikation der Gleichung mit x (da $x \neq 0$) zeigt eine wahre Aussage.

d) $L = \{\,\}$
Lösungsweg: Multiplikation der Gleichung mit x (da $x \neq 0$) führt zu einer quadratischen Gleichung; Anwendung der Mitternachtsformel liefert eine negative Diskriminante.

… Bruchgleichungen mit Parametern bearbeiten.

$x + \frac{a}{x} = -6 \qquad | \cdot x$

$x^2 + a = -6x \qquad | + 6x$ und Anwendung der Mitternachtsformel

$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4a}}{2}$

Um zwei Lösungen zu erhalten muss gelten: $36 - 4a > 0$;
dies wird erfüllt für $a < 9$.
Durch Probieren findet man für $a = 5$ wie verlangt zwei ganzzahlige Lösungen.

… Aussagen über die Lösungsmenge von Bruchgleichungen treffen.

Da $\boldsymbol{x+3 > x+2}$ für $\boldsymbol{x > 0}$ ist, gilt folglich für alle positiven x-Werte:

$\boldsymbol{\frac{1}{x+3} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{x+2} + 1 > 1},$

also können die beiden Seiten der Gleichung nicht gleich sein.

Lösung: Station 5

Ich kann...

… Terme vereinfachen und zusammenfassen.

a) $a^3 - a(3-a)^2 - (2a-9)a = a^3 - a(9 - 6a + a^2) - (2a^2 - 9a)$
$= a^3 - 9a + 6a^2 - a^3 - 2a^2 + 9a = 4a^2$

b) $x^2x^4 + \frac{x^8}{x^2} + (x^2)^3 + x^0 = x^6 + x^6 + x^6 + 1 = 3x^6 + 1$

… Gleichungen mit Formvariablen lösen.

Die Diskriminante ist $D = (3a - 2b)^2 + 24ab = 9a^2 - 12ab + 4b^2 + 24ab$
$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$. Dieser Term ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ nicht negativ.
Damit hat die quadratische Gleichung mindestens eine Lösung.

Die Gleichung hat genau dann genau eine Lösung, wenn $a = b = 0$ ist oder für $b = -1{,}5a$.
Begründung:
Genau eine Lösung hat die Gleichung, wenn für die Diskriminante gilt: $(3a + 2b)^2 = 0$.

… Gleichungen mit Realitätsbezug nach einer Variablen auflösen.

a) Aufgrund des Sachzusammenhangs gilt: $T > 0$, $g > 0$ und $l > 0$. Damit ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{g} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = l$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{g} \cdot T^2 = 4\pi^2 \cdot l \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{g} = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

<u>1. Möglichkeit</u>: auf beiden Seiten den Kehrwert bilden, also

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1\,R_2} + \frac{R_1}{R_1\,R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1\,R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

<u>2. Möglichkeit</u>: mit dem Nenner $R \cdot R_1 \cdot R_2$ multiplizieren, also

$$\frac{RR_1R_2}{R} = \frac{RR_1R_2}{R_1} + \frac{RR_1R_2}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \quad \Leftrightarrow \quad R_1R_2 = R \cdot (R_1 + R_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Analog (z. B. mit der 2. Möglichkeit): $\frac{RR_1R_2}{R} = \frac{RR_1R_2}{R_1} + \frac{RR_1R_2}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \quad \Leftrightarrow$
$R_1R_2 - RR_1 = RR_2 \Leftrightarrow \quad R_1 \cdot (R_2 - R) = RR_2 \quad \Leftrightarrow \quad R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$ und $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.

cosh
cooperation schule:hochschule

ZSL
Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg

Lösung: Station 6

Ich kann...

... Potenzen mit gleichen Basen zusammenfassen.

a) $x^2 \cdot x^4 + x^2 \cdot x^{-4} = x^{2+4} + x^{2-4} = x^6 + x^{-2}$

b) $\frac{x^n}{x^{n+1}} \cdot x^2 = x^{n-(n+1)+2} = x^1 = x$

... Potenzen mit gleichen Exponenten zusammenfassen.

a) $(3a)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(3a \cdot \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2 = 9$

b) $(x+3)^a \cdot (2x)^a = ((x+3) \cdot (2x))^a = (2x^2 + 6x)^a$

c) $(5x)^3 + x^3 = 125x^3 + x^3 = 126x^3$

... Potenzen potenzieren.

a) $(a^2 \cdot b^{-3})^2 = a^{2 \cdot 2} \cdot b^{-3 \cdot 2} = a^4 \cdot b^{-6}$

b) $\left(\frac{x \cdot y^4}{z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{z^3}{x \cdot y^4}\right)^2 = \frac{z^6}{x^2 \cdot y^8}$

... Terme mit Wurzeln zusammenfassen.

a) $\sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{6}+\frac{1}{3}} = a$

b) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{x^{1/2} \cdot x^{2/3}}{x^{1/6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = x$

... die Rechengesetze für Potenzen anwenden.

a) $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ und $(2a \cdot b)^2 = 4a^2b^2$

b) $a^3 \cdot a^4 - 8 \cdot (a^2)^6 + (2a^3)^4 + \frac{a^{12}}{a^5} = a^7 - 8a^{12} + 16a^{12} + a^7 = 2a^7 + 8a^{12}$

c) $b^6a^6 - (ab)^2 \cdot [(ba)^4 - (b+a)^2] + b^8a^8$

$= b^6a^6 - b^6a^6 + b^2a^2(b^2 + 2ab + a^2) + b^8a^8 = a^2b^4 + 2a^3b^3 + a^4b^2 + a^8b^8$

d) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4 = \frac{a^6 \cdot b^3}{c^3 \cdot d^9} : \frac{a^4 \cdot b^8}{c^8 \cdot d^8} = \frac{a^6 \cdot b^3}{c^3 \cdot d^9} \cdot \frac{c^8 \cdot d^8}{a^4 \cdot b^8} = \frac{a^2 \cdot c^5}{b^5 \cdot d}$

Lösung: Station 7

Ich kann...

… Funktionen ableiten.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6$

b) $f'(x) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$

c) $f'(x) = 2 \cdot \pi \cdot \cos(\pi x)$

d) $f'(x) = -2\frac{1}{x^3}\sin(x) + \frac{1}{x^2}\cos(x)$

e) $f'(x) = 0$

… Aussagen über ihr Schaubild treffen.

a) richtig
Begründung: $\boldsymbol{f'}$ hat bei $\boldsymbol{x = 0}$ einen Vorzeichenwechsel von – nach +.
Damit hat das Schaubild von $\boldsymbol{f}$ dort einen Tiefpunkt.

b) falsch
Begründung: Da $\boldsymbol{f'}$ bei $\boldsymbol{x = 0}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat, kann $\boldsymbol{f}$ für $\boldsymbol{-2 < x < 2}$ keine gleichbleibende Monotonie besitzen.

c) richtig
Begründung: $\boldsymbol{f'(-2) = f''(-2) = 0}$ und $\boldsymbol{f''' = f''}$ hat bei $\boldsymbol{x = -2}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel; also hat $\boldsymbol{f}$ dort eine Wendestelle.

… Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung untersuchen.

$\boldsymbol{f'(x) = x^2 - 2x - 8\,;\, f''(x) = 2x - 2}$

Hoch- und Tiefpunkte:
$f'(x) = 0$ führt zu einer quadratischen Gleichung, Lösung mit der Mitternachtsformel ergibt $x_1 = 4; x_2 = -2$
$f''(-2) = -6 < 0$ und somit Hochpunkt im Punkt $H(-2|f(-2))$, also $H\left(-2\middle|\frac{31}{3}\right)$.
$f''(4) = 6 > 0$ und somit Tiefpunkt im Punkt $T(4|f(4))$, also $T\left(4\middle|-\frac{77}{3}\right)$.
Wendepunkte:
$f''(x) = 2x - 2\,;\; f'''(x) = 2$
$f''(x) = 0$ führt zu der Lösung $x = 1$
Da $f'''(1) \neq 0$ existiert der Wendepunkt im Punkt $W(1|f(1))$, also in $W\left(1\middle|-\frac{23}{3}\right)$.
Krümmung:
Es gilt: $f''(x) = 2x - 2 > 0$ d. h. für $x > 1$ ist das Schaubild von f linksgekrümmt. Entsprechend sieht man, dass es für $x < 1$ rechtsgekrümmt ist.

Ich kann...

… Definitions- und Wertemengen angeben.

$f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ $D = R\setminus\{0\}$ $W = (0;\ \infty)$

$f_2(x) = 1 + e^{-x}$ $D = R$ $W = (1;\ \infty)$

$f_3(x) = \sqrt{1-x}$ $D = (-\infty; 1]$ $W = [0;\ \infty)$

$f_4(x) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $D = R$ $W = [-0{,}5; 0{,}5]$

… die Wirkung von Parametern in Funktionstermen beurteilen.

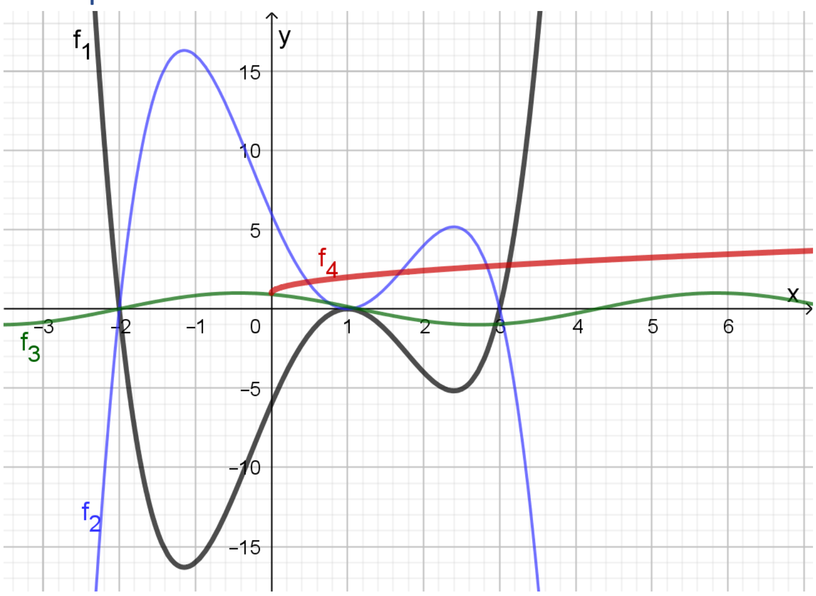
$f_1(x) = x^d + 2,$ d muss ungerade sein.

$f_2(x) = d\sin(x) + 2,$ d muss größer oder gleich 2 sein.

$f_3(x) = d - e^{2x},$ d muss größer 0 sein.

$f_4(x) = \frac{1}{x+d} - 2,$ d kann beliebig gewählt werden.

… Graphen von Funktionen skizzieren.



… Rückschlüsse auf Eigenschaften der Funktion ziehen.

Lösung: Es sei $g(x) = x$ und $h(x) = e^x$.
Für $x \to \infty$ gilt $g(x) \to \infty$, $h(x) \to \infty$, also auch $f(x) \to \infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt dagegen $g(x) \to -\infty$, $h(x) \to 0$, also $f(x) \to -\infty$.
Somit muss f eine Nullstelle haben.

Lösung: Station 9

Ich kann...

… algebraische Aussagen begründen oder widerlegen.

a) Gegenbeispiel: a = 2 ; b = 4 liefert $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ bzw. $\frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$

b) Es sind $a, b, c > 0$. Also folgt aus $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dass $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Somit $a < b$.

Analog: $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} \Leftrightarrow a < c$ $\quad$ $q.e.d.$

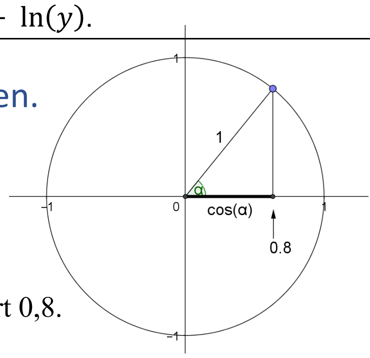
… mathematische Begriffe mit Worten erklären.

Die Wurzel einer Zahl x ist die nicht negative Zahl, die quadriert x ergibt.

… Rechenregeln herleiten.

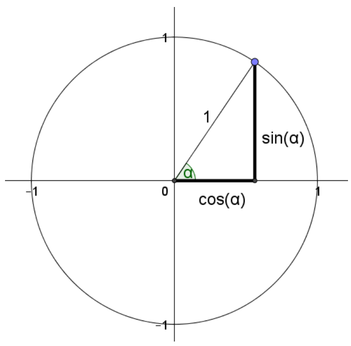
Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, muss gelten $x, y > 0$.
Damit ist es möglich, sie eindeutig darzustellen ($x = \mathrm{e}^u$ und $y = \mathrm{e}^v$).
Dann gilt $u = \ln(x)$ und $v = \ln(y)$.
Damit ist $\ln(x \cdot y) = \ln(\mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^v) = \ln(\mathrm{e}^{u+v}) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$.

… trigonometrische Zusammenhänge […] begründen.

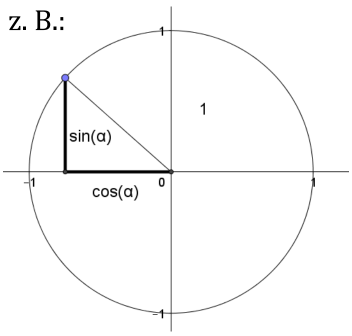


a) $0 \leq \alpha \leq 180°$:
Der Punkt befindet sich in der oberen Halbebene.
In der linken Halbebene gilt $\cos(\alpha) \leq 0$.
Also befindet sich der Punkt im ersten Quadranten.
Hier gibt es nur einen Punkt auf dem Einheitskreis mit x-Wert 0,8.

b) Es liegt ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse 1 vor.
Nach Pythagoras gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1^2 = 1$.



Da Quadrate stets positiv sind, lässt sich dies auf alle anderen Quadranten übertragen,
z. B.:



Lösung: Station 10

Ich kann typische Fehler erkennen und korrigieren bei Aufgaben zu …

… Potenzen.

a) **korrekt**: $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$

Fehler: Potenzgesetze nicht beachtet – Hochzahlen wurden multipliziert, nicht addiert.

b) **korrekt**: $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Fehler: Es wurde gerechnet „$9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$".

… Logarithmen.

a) **korrekt:** $\log_4(1) = 0$, denn $4^0 = 1$

Fehler: Falsches Begriffsverständnis (Definition des Logarithmus)

b) **korrekt**: $\ln\left(\frac{e^5}{\sqrt{e}}\right) = 4{,}5$, denn $\frac{e^5}{\sqrt{e}} = \frac{e^5}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{5-\frac{1}{2}} = e^{4{,}5}$

Fehler: Potenzgesetz falsch angewendet, nicht „$5 : \frac{1}{2} = 10$", sondern „$5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$"

… Wurzeln.

a) **korrekt**: $\frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Fehler: Wurzelgesetze nicht beachtet, denn $\frac{\sqrt{20}}{2} \neq \sqrt{\frac{20}{2}}$

b) **korrekt**: $\sqrt{16a^4 + 4a^2b^2} = \sqrt{4a^2 \cdot (4a^2 + b^2)} = 2a \cdot \sqrt{4a^2 + b^2}$

Fehler: Wurzel auf jeden Summanden angewendet

… Bruchtermen.

a) **korrekt**: $\frac{x}{x^2+x} = \frac{x}{x \cdot (x+1)} = \frac{1}{x+1}$

Fehler: „Kürzen aus einer Summe", denn $\frac{x}{x^2+x} \neq \frac{1}{x^2}$

b) **korrekt**: $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x} = \frac{x \cdot (x^2+4x+4)}{x \cdot (x+2)} = \frac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x + 2$

Fehler: „Kürzen aus einer Summe"

… Ableitungen.

a) $f(x) = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2e^{-2x}$ (Kettenregel)

Fehler: Regel für x^n verfremdet

b) $g(x) = 2x \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$ (Produktregel)

Fehler: Produkt missachtet, Faktoren einzeln abgeleitet