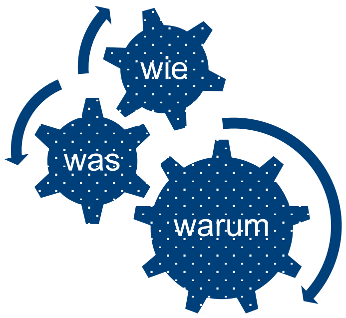
Muster und Strukturen

SINUS

- Guter Unterricht ist eine wichtige Voraussetzung für gelingendes Lernen.
- Lehrkräfte haben die Aufgabe, **den Unterricht an sich verändernde Bedingungen anzupassen** und dafür zu sorgen, dass Kinder und Jugendliche erfolgreich lernen.
- Dabei brauchen sie Unterstützung durch bildungspolitisch Verantwortliche, die Schulaufsicht sowie durch Schulleitungen,
- und sie benötigen Impulse aus der Fachdidaktik und der Bildungswissenschaft.

Fischer, C., Rieck, K., Döring, B. & Köller, O. (2014) (Hrsg.).
Zusammenwirken - zusammen wirken. Unterrichtsentwicklung anstoßen, umsetzen, sichern. Klett. Kallmeyer.
http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/4814_Zusammenwirken_Flyer_A4.pdf

Muster und Strukturen



Mathematik macht ein Bildungsangebot …

- Kenntnisse … das weiß auch Google …
- Fertigkeiten … das kann `ne App …
- Fähigkeiten

Mathematik sehen und verstehen

Das unsichtbare Abstrakte

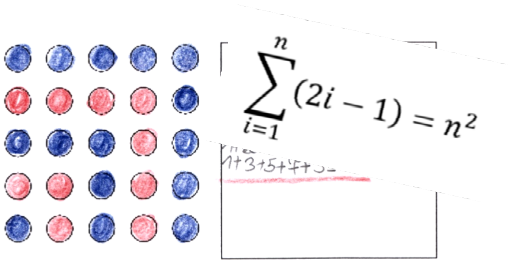
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

But for all mathematics books tend to be awash with symbols, mathematical notation no more is mathematics than musical notation is music. It is in the performance that the music comes alive and becomes part of our experience; the music exists not on the printed page but in our minds. The same is true for mathematics. … And yet…very obvious difference… It requires no musical training to experience and enjoy music when it is performed….
human beings have developed no mathematical equivalent to a pair of ears.

(Devlin, 1997, S. 3-4)

Devlin, K. (1997). *Mathematics – The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe.* New York: Scientific American Library.

Das Sichtbare
für mathematische Augen und Ohren …



Das Sichtbare
für mathematische Augen und Ohren …

Wenn ich jemandem, der keine Mathematik kennt, erzählen will, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

ist, so zeige ich ihm, dass 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, usw. und hoffe, dass er nach dem ‚usw.' verstanden hat, wie es weitergeht.

(Freudenthal, 1973, S. 589)

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett.

Denken fördern

Das Denken in Mustern bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie,
weil viele Einzelfälle mit einem Schlag gemeinsam erfasst werden können.
Unser ganzes kognitives System ist auf Muster ausgerichtet,
denn das Gehirn wäre nicht in der Lage,
jeden Einzelfall gesondert zu behandeln.
Erkennen basiert immer auf Musterbildung.

(Wittmann & Müller, 2007, S. 48).

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.

Muster

strukturieren vs. Struktur*

** patterning*

- Ordnung, Regelmäßigkeit und Wiederholung, denen eine Vorhersagbarkeit bescheinigt wird (Deutscher, 2012; Akinwunmi & Lüken, 2021; Lüken, 2012; Rathgeb-Schnierer, 2007)
- Die im Phänomen gegebene Regelmäßigkeit erlaubt eine zuverlässige Hypothese, wie das Muster weitergeht bzw. wie eine dieser Ordnung entsprechende Erweiterung aussehen müsste. (Steinweg, 2014)

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).
Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Münster: Waxmann.
Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder erforschen arithmetische Muster. *Grundschulunterricht*, 54(2), 11–19.
Steinweg, A. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). Bamberg: University of Bamberg Press (UBP).

Struktur

- *Struktur* wird verstanden als mathematische Eigenschaften und Beziehungen (Relationen), die als Beschaffenheitsmerkmale abstrakter Gedankenobjekte (Mason, 1987) bzw. Noumena (Freudenthal, 1983) die Mathematik selbst definieren. (Schifter, 2018; Mason et al., 2009)
- Mathematische Strukturen beziehen sich auf Merkmale und Eigenschaften, die für jegliche Fälle konstant bleiben.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.
Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewusstheit Einfluss nehmen. *mathematik lehren*,(21), 4–5.
Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10–32.
Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (S. 309–327). Cham, CH: Springer International Publishing.

Muster und Strukturen

Muster

Sichtbare Phänomene,
Regelmäßigkeiten

Strukturen

Mathematische Beziehungen,
Eigenschaften, Relationen

Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H. Siller, W. Weigel & J. Wörler (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2020 (S. 39–46). Münster: WTM-Verlag.

Muster und Strukturen

Muster
phänomenologische Regelmäßigkeiten

öffnen Türen zu →
← bilden die Grundlage von

Strukturen
mathematisch festgelegte Eigenschaften und Relationen

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Und was heißt das jetzt genau für MU ...

Muster überall

Pattern is less a topic of mathematics than a defining quality of mathematics itself.
Mathematics 'makes sense'
because its patterns allow us to generalize our understanding from one situation to another.
Children who expect mathematics to 'makes sense'
look for patterns.

(Brownell et al., 2014, S. 84)

Brownell, J., Chen, J.-Q., Ginet, L. (2014). *Big Ideas of Early Mathematics*. Boston u.a.: Pearson.

Strukturen verkörpern

(...) Strukturen kommen streng genommen in der Realität gar nicht vor, sondern sind theoretische Konstrukte, die in die Realität „hineingelesen" werden. (...)
Damit diese Strukturen für die mathematische Bearbeitung zugänglich werden, bedarf es künstlicher Verkörperungen (...).

(Wittmann & Müller, 2007, S. 50)

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.

Bildungsplan Baden-Württemberg (2016)

- Neben dieser Anwendungsorientierung ist es auch Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Grundschule, den Kindern zu ermöglichen, auf ihrem Niveau mathematische Strukturen und Zusammenhänge zu entdecken, diese zu untersuchen und zu nutzen. Diese Strukturorientierung eröffnet den Kindern den Zugang zu ästhetischen Aspekten von Mathematik, die sich in arithmetischen und in geometrischen Mustern zeigen. (Bildungsplan BW, 2016, S. 3)
- Der Bereich „Muster und Strukturen" (vergleiche KMK 2004, Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich), in dem das Erkennen, Beschreiben und Darstellen von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen Beziehungen verankert ist, wird als übergreifendes Prinzip angesehen. Anders als in den KMK Bildungsstandards wird er daher nicht eigenständig ausgewiesen, sondern in alle Leitideen integriert: (Bildungsplan BW, 2016, S. 7)

http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GS_M.pdf

Arithmetisches Denken – Algebraisches Denken

to do mathematics

- Prozeduren, die unmittelbar durchführbar sind
- numerische Antworten auf Berechnungen
- Zahlen als Mittel in Gleichungen oder als Resultate von Zählprozessen bzw. Anzahlerfassung von Mengen

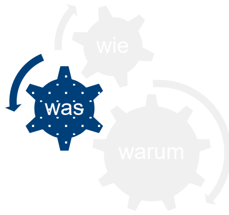
to think about mathematics

- Konzepte, die sich z.B. in einer Gleichung als Beziehung zwischen Zahlen, Objekten oder Variablen darstellen.
- das Allgemeine der Eigenschaften von Zahlen und Operationen und die mathematischen Beziehungen werden neue Objekte des Denkens

Mathematik ist ein Spielplatz …

- Eine der besonderen Denkfähigkeiten des Menschen ist es, Zusammenhänge zu analysieren, Systeme zu durchschauen und kritisch zu reflektieren.
- Die Stärke der Mathematik ist, dass sie selbst ein System ist.
- Mathematik ist ein einzigartiges Fach, da die Struktur im Fach verlässlich gegeben ist und sich in Mustern zeigt und erkennen lässt.
- Mathematik bietet damit einen Spielplatz, um das Denken darin zu schulen, Muster zu sehen und die Strukturen zu verstehen.

Auch das noch?!



Grundideen

Strukturen und Systeme der Arithmetik und quantitativer Argumentationen / verallgemeinerte Arithmetik	Arithmetik Verallgemeinerungen	verallgemeinerte Arithmetik
	Äquivalenz und Gleichungen	Äquivalenz, Terme, Gleichungen und Ungleichungen
Funktionen	Muster und Funktionen	Funktionales Denken
inner- und außermathematische Anwendungen / Modellierung von Sprache		
Kaput, 2008	Cooper & Warren, 2008	Blanton et al., 2019

Learning through an Early Algebra Progression
LEAP Projekt
Forschungsgruppe
Blanton (USA)

Blanton, M.L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., & Stephens, A., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics,102*(2), 193–219.
Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 23–37.
Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (S. 5–17). New York: Routledge.

Internationaler Vergleich z.B. Big Ideas LEAP (USA)

- Relationales Verständnis von = durch wahr/falsch und offene Gleichungen; Eigenschaft der Äquivalenz von verschiedenen Gleichungen ✓
- Eigenschaften der Operationen (additives/multiplikatives neutrales Element, additives Inverses, Kommutativität …); ✓
- Klassen von Zahlen (gerade/ungerade); ✓
- Begründen von Verallgemeinerungen (von empirischen zu allgemeinen Argumenten auf der Grundlage von Argumentation mit Darstellungen) ✓
- Relationen zwischen Anzahlen (lineare Funktionen) ✓

(Blanton et al., 2019)

Das machen wir ja alles schon …

Günstige Bedingungen bewusst nutzen

- Der Mathematikunterricht in Deutschland thematisiert die Inhalte, die im internationalen Vergleich als wesentlich für Muster und Strukturen angesehen werden.
- Die inhaltlichen Themen werden im deutschsprachigen Raum jedoch *kaum bewusst* Mustern und Strukturen zugeordnet.
- Bewusste unterrichtliche Thematisierung kann durch Präzisierung tragfähiger Grundideen unterstützt werden.

Grundideen geben Orientierung

- Die Lehrkräfte müssen mit den Lernenden an den grundlegenden Ideen hinter den Themen arbeiten. (...) explizite Aufmerksamkeit schenken und sich Zeit nehmen für das, was ich Kernbewusstheit nennen würde, oder für die Konzepte an Schnittstellen [neuralgische Lehr-Lern-Situationen].

Mason, J. (2016) In conversation with John Mason. Laurinda Brown interviews John Mason. *Mathematics Teaching*, 254, 42–45.

Muster sehen – Strukturen erkennen

Sichtbare Phänomene Regelmäßigkeiten

Mathematische Eigenschaften und Relationen

in...

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

- Arithmetikunterricht ist nicht per se Unterricht, der algebraisches Denken fördert, aber er kann Optionen bereithalten.
- In der Natur von Aufgaben zu Mustern und Strukturen liegen also beide Denkweisen, zum einen arithmetische und zum anderen algebraische.
- Wenn Algebra als verallgemeinerte Arithmetik beschrieben wird, dann wird dabei diese Verwobenheit deutlich.

Muster sehen

0 + 5 = 5
1 + 4 = _
2 + 3 = _
3 + 2 = _
_ + 1 = _
_ + _ = _

Muster sehen

0 + 5 = 5
1 + 4 = _
2 + 3 = _
3 + 2 = _
_ + 1 = _
_ + _ = _

- Das Ergebnis ist immer 5.
- Das Ergebnis ist immer gleich.
- Die Aufgaben sind alle Plusaufgaben.
- Die erste Zahl wird immer größer.
- Die erste Zahl ist wie Zählen.
- Die zweite Zahl wird immer kleiner.

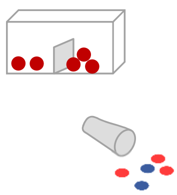
Strukturen erkennen ... in Zahlen

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

- Verschiedenen Möglichkeiten, 5 in zwei Summanden zu zerlegen. (Partition)

5

0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0



Strukturen erkennen … in Operationen

- … je zwei Aufgaben entdecken, bei denen die Reihenfolge der Summanden getauscht ist

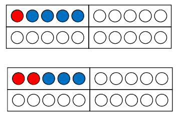
0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

Strukturen erkennen … in Gleichungen

- … Äquivalenz der Terme durch Konstanz der Addition
- 1+4 und 2+3 sehen nur auf der Ebene der Phänomene völlig anders.
- Konstanz der Addition nutzt das neutrale Element Null
- Eine versteckte Null wird addiert. z.B. 0 = +1 – 1

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

- 1 + 4 = 1+1 + 4–1 = 2 + 3



Strukturen erkennen … in Funktionen

- Änderungsverhalten (immer 1 mehr bzw. immer 1 weniger) und die jeweilige Ausgangszahl (0 bzw. 5)
- Folgen als Funktionen
- u.a. *auch* Folge der Ergebniszahl als konstante Folge (Funktion)

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

Funktionen von Anfang an …

Struktur-Eigenschaften:
z.B. linkstotal und rechtseindeutige Relation (Beziehung)

Jede Zahl hat einen eindeutigen Partner

1	2	3	4	5	6	7
2	5	8	11	14	17	20

Das geht immer weiter …

linkstotal

rechtseindeutig

Funktionale Beziehungen

1	3
2	7
3	11
4	15
5	19
…	
47	

+4 +4 +4

Rekursive Perspektive

Funktionale Beziehungen

1	3
2	7
3	11
4	15
5	19
…	
47	

+2 +8

Co-variative Perspektive

Vorsicht vor Tricks …
Verdoppeln führt zu Verdoppeln geht nicht

Funktionale Beziehungen

1	3
2	7
3	11
4	15
5	19
…	
47	

Explizite Perspektive

$n \rightarrow 4(n-1)+3$

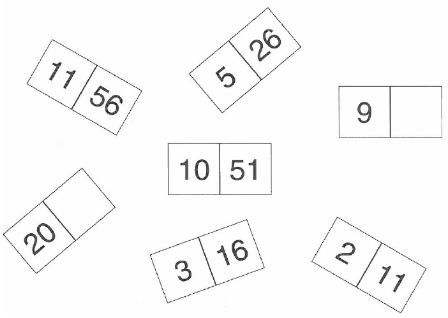
$n \rightarrow 4n - 1$

Funktionale Beziehungen

1	3
2	7
3	11
4	15
5	19
…	
47	187

Zahl & Partnerzahl

$n \rightarrow 5n+1$



Steinweg, A. S. (2000). Wie heißt die Partnerzahl? Ein Übungsformat für alle Schuljahre. *Die Grundschulzeitschrift*, Heft 133/April: 18–20.

Lern- und Denkentwicklung anregen …

Bildungsplan Baden-Württemberg (2016)

- Neben dieser Anwendungsorientierung ist es auch Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Grundschule, den Kindern zu ermöglichen, auf ihrem Niveau mathematische Strukturen und Zusammenhänge zu entdecken, diese zu untersuchen und zu nutzen. Diese Strukturorientierung eröffnet den Kindern den Zugang zu ästhetischen Aspekten von Mathematik, die sich in arithmetischen und in geometrischen Mustern zeigen. (Bildungsplan BW, 2016, S. 3)
- Der Bereich „Muster und Strukturen“ (vergleiche KMK 2004, Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich), in dem das Erkennen, Beschreiben und Darstellen von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen Beziehungen verankert ist, wird als übergreifendes Prinzip angesehen. Anders als in den KMK Bildungsstandards wird er daher nicht eigenständig ausgewiesen, sondern in alle Leitideen integriert: (Bildungsplan BW, 2016, S. 7)

Everyone who gets to school
has already displayed the powers needed to think algebraically
and to make sense of the world mathematically.
They have all generalised and expressed generalities to themselves and others. (…)
Furthermore, generalisation, being fundamental to mathematics, is a part of every mathematics topic.

(Mason et al., 2005, S. iv)

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Paul Chapman Publishing.

ReCoDE (recognise-continue-describe-explain)

Re *recognise* sehen, hineindeuten, erkennen, bemerken

Co *continue* replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren

D *describe* mündlich oder schriftlich kommunizieren

E *explain* argumentieren, erklären, verallgemeinern

vgl. z.B. Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards*(S. 51–66). Bamberg: University of Bamberg Press (UBP).

Re *sehen, hineindeuten, erkennen, bemerken*

Re Erkennen
Co Fortführen
D Beschreiben
E Begründen

We have no direct access
to what goes on in other people's heads.
(von Glasersfeld, 1991, S. xvi)

Generalizations are the life-blood of mathematics. (...)
Generalizing starts when you sense an underlying pattern,
even if you cannot articulate it.
(Mason, Burton & Stacey, 2010, S. 8)

Glasersfeld, E. von (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer.
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Co *replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren*

Re Erkennen
Co Fortführen
D Beschreiben
E Begründen

- Wie geht es weiter?
- Finde das nächste.
- Finde das 50.
- Finde das 100.

2	5	8	11	14	17	20

- Welche Muster passen zusammen? (mathematisch strukturgleich)
- z.B. AB-Struktur zweigliedrige Wiederholungseinheit aus zwei Farben, Formen, Größen oder Ziffern:

2, 5, 2, 5, ... ○□○□○□ ...  ...

D *mündlich oder schriftlich kommunizieren*

Re Erkennen
Co Fortführen
D Beschreiben
E Begründen

- Was fällt dir auf?
- Beschreiben des eigenen Denkens.
- Beschreiben der Regelmäßigkeiten / der erkannten Muster.

Erkennen und das Beschreiben mathematischer Muster (...)
als zwei sich wechselseitig bedingende Prozesse (...)
Beschreiben nicht als der Deutung nachrangiger Prozess
(Akinwunmi, 2012, S. 280)

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).

Vielfalt verbaler Beschreibungen

Verallgemeinerungsweise	Beschreibung der Kategorie	Plakative Beschreibung des Terms x^2
Angabe eines Beispiels	SuS geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches.	„Das ist zum Beispiel drei mal drei."
Aufzählung mehrerer Beispiele	SuS zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf.	„Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter."
Quasi-Variablen	SuS verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.	„Ich rechne immer drei mal drei."
Bedingungssätze	SuS verwenden Bedingungssätze.	„Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei."
Variablen	SuS verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.	„Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen." Oder „? · ?"

(Akinwunmi, 2011, S. 50)

Akinwunmi, K. (2011). *Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule*, In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 47–50). Münster: WTM.

Beschreiben im Fokus

Ideen nach Link (2012, 2013)

- Markieren und schreiben
- Beschreibungen verbessern
- Finde das Päckchen

Das Zahlenmuster muss so beschrieben werden, dass es einem anderen Kind möglich ist, eine zum Muster passende Aufgabe (z.B. bei der Fortsetzung eines Entdeckerpäckchens) auf der Basis der Beschreibung aufzuschreiben.
(Link, 2013, S. 45)

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Link, M. (2013). Zahlenmuster beschreiben. *Die Grundschulzeitschrift*, 268/269, 42–46.

Weitere Fördermöglichkeiten

- Wortspeicher
- Sprachliche Vorbilder
- Über Sprache nachdenken

primakom
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik

https://primakom.dzlm.de/%C3%BCbergreifendes/vielfalt/einstieg-0/unterricht

Sprechen Sie Mathematik?

Mathematische Sprache

- Keine Angst vor Fachbegriffen in der Arithmetik
- Summand, Faktor, Differenz …

Entwicklungsmodelle – ein Beispiel

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen

Wachstumspunkt (Growth Point)	Erkennen und Fortsetzen	Beschreiben
Per-formale Muster	Keine Identifikation von sich	-
Nicht formale Muster		Beschreibung einiger Aspekte des Musters
Formale Muster	eines nahen Elements herleiten	rbale Beschreibung des Musters
Verallgemeinerung	eine mögliche Fortsetzung eines nahen Elements identifizieren und mit Begründung eine mögliche Fortsetzung eines fernen Elements herleiten	Explizite Beschreibung des Musters
Abstrakte Verallgemeinerung	Ferne Elemente des Musters durch Anwendung der Regel erzeugen	Explizite Beschreibung der Regel des Musters in symbolischer Notation

Verallgemeinerungen [sind] kein hinreichender Indikator für das strukturelle Verständnis (…) der Lernenden
(Akinwunmi & Lüken, 2021, S. 17)

Twohill, A. (2013). Algebraic reasoning in primary school: developing a framework of growth points. C. Smith (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 33*(2), 55–60.
Twohill, A. (2018). *The construction of general terms for shape patterns: Strategies adopted by children attending fourth class in two Irish primary*. PhD thesis, Dublin City University. Retrieved from http://doras.dcu.ie/22206/

E *argumentieren, erklären, verallgemeinern*

- Warum ist das so?
- Woher hast du das gewusst?
- Ist das immer so?

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

Argumente finden …

- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Muster*
  d.h. auf sichtbare Oberflächenmerkmale
- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Strukturen*
  d.h. auf mathematische Eigenschaften und Beziehungen

(Akinwunmi & Steinweg, 2022)

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

empirische Faktenwissen / Erfahrungen in Lernsituationen

⇕

relational allgemeinen Wissen / mathematische Grundlagen

(Schwarzkopf, 2019, S. 59)

Strukturell-mathematische Argumente sind weitaus schwieriger zu verstehen und zu charakterisieren, insbesondere weil sie sich sprachlich und auf den ersten Blick kaum von den empirisch gestützten Argumenten unterscheiden.

(Schwarzkopf, 2003, S. 232)

Schwarzkopf, R. (2019). Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule: Zur lerntheoretischen Funktion des Argumentierens. In Steinweg, A. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 9: Darstellen und Kommunizieren* (S. 55–68). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).
Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematikdidaktik, 24*(3/4), 211–235.

- *Ohne strukturellen Fokus* nutzen die Lernenden zur Begründung von Regelmäßigkeiten (wie z. B. die Konstanz des Ergebnisses) weitere sichtbare Regelmäßigkeiten an anderer Stelle (z. B. in den Zahlen der Aufgaben) und *verbleiben so an der sichtbaren Oberfläche des Musters*.
- In unserer Studie wurde deutlich, dass die symbolische Darstellung von Aufgaben die Kinder paradoxerweise dazu verleitet, an der Oberfläche des Musters zu bleiben und sich an konkrete (numerische) Beispiele zu halten, während ikonische oder materialbasierte Darstellungen die Möglichkeit bieten, mehr strukturelle Argumente zu finden.
- Darstellungen und Repräsentationen spielen eine entscheidende Rolle für Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf mathematische Strukturen.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Bezaubernde Mathematik der Muster und Strukturen

Muster verzaubern und entzaubern die Mathematik.
Mathematik wird erfahrbar in der Schönheit ihrer Strukturen und kann so faszinieren.

Mathematik wird durchschaubar in der Logik ihrer Strukturen und kann deshalb hinterfragt werden.

(Steinweg, 2001, S. 262)

Mehrwert Muster & Struktur Besser Lernen ....

- Der Weg von Prozessen zu abstrakten Objekten verbessert unser Verständnis von Mathematik und damit auch das Selbstvertrauen in die eigene mathematische Kompetenz (Sfard 1991, S. 29).
- Das Verstehen der strukturellen Zusammenhänge schützt davor, dass Missverständnisse oder Unsicherheiten bei den Lernenden zu dem Fehlschluss führen, Mathematik an sich läge schlicht außerhalb ihrer eigenen Kompetenzen und Möglichkeiten: „Those who are not prepared to actively struggle for meaning (for reification) would soon resign themselves to never understanding mathematics" (Sfard, 1991, S. 33)

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Mehrwert für arithmetische Kompetenzen

- Der Blick auf allgemeine Beziehungen zwischen den beteiligten Zahlen und auf die Struktur, trägt dazu bei, Rechenmethoden und -strategien besser zu verstehen oder sogar kreativ neue, elegante Rechenwege zu erfinden (Arcavi, Drijvers & Stacey 2017, S. 4).
- „Algebraisches Denken [ist] eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung von flexiblen Rechenfähigkeiten" (Schwarzkopf, 2017, S. 22).
- Die im deutschsprachigen Unterricht übliche Thematisierung von so genannten halbschriftlichen Strategien in der Arithmetik, nutzt genau diese besondere Perspektive auf Strukturen von Zahlen (Zahlenblick, Zahlensinn) und Operationseigenschaften.

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities. Routledge.
Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal Rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, (306), 18–22.

Mehrwert für prozessbezogene, allgemeine Kompetenzen

- Dreiklang *erkennen-beschreiben-darstellen* vgl. Bildungsstandards (KMK, 2005) und auch Bildungsplan Baden-Württemberg (2016)
- Bei den allgemeinen Kompetenzen kann enge eine Verzahnung zu den Kompetenzen Problemlösen, Darstellen, Kommunizieren und Argumentieren ausgemacht werden.

http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/exportpdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GS_M.pdf
https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

- „Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren), Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen" (KMK, 2005, S. 7).
- „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen, eine Darstellung in eine andere übertragen, Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten. " (KMK, 2005, S. 8)
- „Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren" (KMK, 2005, S. 8)
- „mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln, Begründungen suchen und nachvollziehen" (KMK, 2005, S. 8)

https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

… nicht von allein.

- Algebraische Grundideen für den Arithmetikunterricht bieten fruchtbare Ansätze bereits ab der Grundschule.
- adäquate Übergangsprozesse entstehen jedoch nicht ohne bewusste Thematisierung und „nicht kraft natürlicher Reifung“ (Winter 1982, S. 199).
- Neben vielen Beispielen von Beziehungen und Eigenschaften benötigen die Kinder auch die explizite Thematisierung dieser Strukturen in alltäglicher Sprache (vgl. Warren 2003, S. 133).

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122–137.
Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica, 5*(4), 185–211.

Mathematik als Gelegenheit

- Mathematik ist ein großartiges und einzigartiges Fach, da die Struktur im Fach verlässlich gegeben ist und sich in Mustern zeigt und erkennen lässt.
  Das gilt allerdings nicht für jede Schulbuchseite oder Kopiervorlage.
- Immer geeignete Muster anbieten, die Zugang zu mathematischer Struktur erlauben und auf je entsprechendem Niveau der Lernenden begründbar sind.
- Erfahrung ermöglichen, dass es lohnt sich zum *Pattern Seeker* zu werden, und zu erwarten, dass hinter der Tür etwas zu finden ist!

Erwartungen und Herausforderungen

an die Lernenden

- ReCoDE von Mustern (Warum-Frage klären)
- Zugang zu allgemeinen Strukturen
- Argumentieren als Prozessziel

Re Erkennen ✓
Co Nutzen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

Erwartungen und Herausforderungen

an die Lernenden

- ReCoDE von Mustern (Warum-Frage klären)
- Zugang zu allgemeinen Strukturen
- Argumentieren als Prozessziel

an Lehrkräfte und die Lehrerinnen- und Lehrerbildung

- Welche Grundidee (M&S in … *Zahlen, Operationen, Gleichungen, Funktionen*) wird fokussiert?
- Warum ist genau dieses Muster geeignet?
- Welche Darstellungen, Fragen, Begründungshilfen, Repräsentationen, bieten sich zur Unterstützung an?

Re Erkennen ✓
Co Nutzen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

Danke für Ihre Aufmerksamkeit.