Übungsaufgaben Newton-Verfahren

Aufgabe 1:
Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

a) Wähle als Startwert $x_0 = 2{,}5$. Berechne damit zunächst den Funktionswert $f(x_0)$.
Berechne anschließend die Steigung der Tangenten an den Graphen im Kurvenpunkt $(x_0|f(x_0))$.

b) Ermittle den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse. Die x-Koordinate liefert den neuen „Näherungswert“ x_1. Dieser Wert ist anschließend der neue „Startwert“. Berechne damit x_2.

Aufgabe 2:
Berechne mit dem Newton-Verfahren den Schnittpunkt der Funktionen
$f(x) = e^x$ und $g(x) = x^3 + x^2 - 3$. Verwende als Startwert $x_0 = 3{,}5$.

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x + x$.
Zeige, dass f genau eine Nullstelle $x^* \in [-1{,}0]$ besitzt und führe für $x_0 = 0$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens durch.
(Quelle: 10. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Mathematik“, WS 13/14, KIT)

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:

a) $f(2{,}5) = 15{,}625$, $f'(x) = 3x^2 + 2$

Steigung der Tangenten im Kurvenpunkt ≙ Funktionswert der 1. Ableitung im Kurvenpunkt:

$f'(2{,}5) = 20{,}75$

b) Bestimmung der Tangentengleichung $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$:

$y = 20{,}75 \cdot (x - 2{,}5) + 15{,}625 = 20{,}75x - 36{,}25$

Bedingung für Schnittpunkt der Tangenten mit der x-Achse: $y = 0$:

$20{,}75x - 36{,}25 = 0 \rightarrow x \approx 1{,}747$

Berechnung von x_2: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}747 - \frac{3{,}826}{11{,}156} \approx 1{,}404$

Aufgabe 2:

Schnittpunkt von $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^3 + x^2 - 3$: $e^x = x^3 + x^2 - 3$

→ Umformung zum Nullstellenproblem für Newton-Verfahren: $e^x - x^3 - x^2 + 3 = 0$

neues $f(x)$: $f(x) = e^x - x^3 - x^2 + 3$; $f'(x) = e^x - 3x^2 - 2x$

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert $x_0 = 3{,}5$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3{,}5 - \frac{f(3{,}5)}{f'(3{,}5)} = 3{,}5 - \frac{-19}{-10{,}63} \approx 1{,}71$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}71 - \frac{f(1{,}71)}{f'(1{,}71)} = 1{,}71 - \frac{0{,}6}{-6{,}66} \approx 1{,}8$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}8 - \frac{f(1{,}8)}{f'(1{,}8)} = 1{,}8 - \frac{-0{,}02}{-7{,}27} \approx 1{,}797$$

Aufgabe 3

f besitzt genau eine Nullstelle in $[-1{,}0]$, wenn $f(-1)$ und $f(0)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen: (hier besteht die Möglichkeit, den Begriff der „Stetigkeit" zu erläutern)

$f(x) = e^x + x$: $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0 \rightarrow$ Vorzeichenwechsel, der Nullstelle bedingt

Newton-Verfahren: $f(x) = e^x + x \rightarrow f'(x) = e^x + 1$

$x_0 = 0$; $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} \approx -0{,}57$$