## Übungsaufgaben Regula falsi

**Aufgabe 1:**

Bestimmt werden soll eine numerische Annäherung von $\sqrt{2}$.

**a)** Überlegen Sie sich eine Gleichung, mit der man einen numerischen Wert von $\sqrt{2}$ mithilfe der Regula falsi ermitteln kann.

**b)** Führen Sie mithilfe der Gleichung aus a) drei Schritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 2$ durch.

**c)** Führen Sie mithilfe der Gleichung aus a) drei Schritte der Regula Falsi mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ durch. Vergleiche anhand der Ergebnisse aus b) und c) die Konvergenzgeschwindigkeit beider Verfahren.
(Quelle: 1. Übungsblatt zur Vorlesung „Numerik“, SS11, Universität Ulm)

**Aufgabe 2:**

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 3$ mithilfe der Regula falsi. Die Nullstelle liegt zwischen $x = 1$ und $x = 2$. Brechen Sie nach dem 2. Iterationsschritt ab.

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - \cos(x)$. Bestimmen Sie die Nullstelle im Intervall [0,1] mittels der Regula falsi auf drei Dezimalstellen genau.

**Lösungsvorschlag:**

**Aufgabe 1:**

**a)** Unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten; nächstliegende und einfachste Möglichkeit:
$f(x) = x^2 - 2$

**b)** Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2} - \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{0{,}25}{3} = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{17}{12} - \frac{f\left(\frac{17}{12}\right)}{f'\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414$$

**c)** Regula-Falsi: $a_{n+1} = a_n - f(a_n) \cdot \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)}$

$a_0 = 1,\, b_0 = 2 \rightarrow [1{,}2]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b-a_0}{f(b)-f(a_0)} = 1 - (-1) \cdot \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{4}{3} \rightarrow \left[\frac{4}{3}, 2\right]$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b-a_1}{f(b)-f(a_1)} = \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \frac{2-\frac{4}{3}}{2-\left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{7}{5} \rightarrow \left[\frac{7}{5}, 2\right]$$

$$a_3 = a_2 - f(a_2) \cdot \frac{b-a_2}{f(b)-f(a_2)} = \frac{7}{5} - \left(-\frac{1}{25}\right) \cdot \frac{2-\frac{7}{5}}{2-\left(-\frac{1}{25}\right)} = \frac{24}{17} \approx 1{,}412 \rightarrow [1{,}412{,}2]$$

**Aufgabe 2:** Nullstelle von $f(x) \rightarrow f(x) = 0$ bzw. $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 3 = 0$

$a_0 = 1,\, b_0 = 2 \rightarrow [1{,}2]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b - a_0}{f(b) - f(a_0)} = 1 - (e^1 - 1 - 3) \cdot \frac{2 - 1}{(e^2 - \sqrt{2} - 3) - (e^1 - 1 - 3)}$$

$$\approx 1 - 1{,}28 \cdot \frac{1}{2{,}97 - 1{,}28} \approx 1{,}301 \rightarrow [1{,}301{,}2]$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)} = 1{,}301 - \left(e^{1{,}301} - \sqrt{1{,}301} - 3\right) \cdot \frac{2 - 1{,}301}{(e^2 - \sqrt{2} - 3) - \left(e^{1{,}301} - \sqrt{1{,}301} - 3\right)}$$

$$\approx 1{,}301 - (-0{,}46) \cdot \frac{0{,}699}{2{,}97 - (-0{,}46)} \approx 1{,}395 \rightarrow [1{,}395{,}2]$$

**Aufgabe 3:** Nullstelle von $f(x) \rightarrow f(x) = 0$ bzw $f(x) = x - \cos(x) = 0$

$a_0 = 0,\, b_0 = 1 \rightarrow [0{,}1]$

$$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b - a_0}{f(b) - f(a_0)} \approx 0 - (-1) \cdot \frac{1 - 0}{0{,}46 - (-1)} = \frac{1}{1{,}46} \approx 0{,}685$$

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)} \approx 0{,}685 - (-0.089) \cdot \frac{1 - 0{,}685}{0{,}46 - (-0{,}089)} \approx 0{,}718$$

$$a_3 = a_2 - f(a_2) \cdot \frac{b - a_2}{f(b) - f(a_2)} \approx 0{,}718 - (-0{,}035) \cdot \frac{1 - 0{,}718}{0{,}46 - 0{,}035} \approx 0{,}738$$

$$a_4 = a_3 - f(a_3) \cdot \frac{b - a_3}{f(b) - f(a_3)} \approx 0{,}738 - (-0{,}002) \cdot \frac{1 - 0{,}738}{0{,}46 - (-0{,}002)} \approx 0{,}739$$