## Didaktische Hinweise

Die komplexen Zahlen haben keinen direkten Bezug zum Alltag. Dennoch ist die Einführung der komplexen Zahlen für die Schülerinnen und Schüler mehr als befriedigend, weil das für viele seltsame Verbot, aus negativen Zahlen die Wurzeln zu ziehen, durch eine Erweiterung des Zahlenraums aufgehoben wird. Im technischen Gymnasium können die Zeigerdiagramme in der Elektrotechnik auf Hochschulniveau neu betrachtet werden.
Für die Unterrichtseinheit der komplexen Zahlen gibt es schon einige Ausarbeitungen von ganzen Unterrichtseinheiten und weitere Dokumente, die für den Kurs Mathe+ hervorragend geeignet sind.
Der Film *Dimensions* lässt sich ebenfalls als Einstieg in die komplexen Zahlen verwenden, der gesamte Unterrichtsverlauf muss dann allerdings umgestellt werden, weil die Herangehensweise eher geometrisch ist.

### Unterrichtsverlauf

Vorgeschlagener Unterrichtsverlauf

1) Motivation (z. B. Seite 1, 2 und 8 im Hainscho-Skript, Cardano) oder der erste Film, („Dimensions“, Kapitel 5) der unten in den Unterrichtsmaterialien erwähnten Filme ab 1:30 bis 5:55.
2) Begriffsklärung, Definition, Schreibweise a+ib
3) Grundlegende Rechenregeln, Film, Kapitel 5 von 5:56 - 9:40, Veranschaulichung der Addition und Subtraktion mit Vektoren
4) Betrag, Argument, Polarform, Film, Kapitel 5 ab 9:40
5) Umwandlung der Polar- in die Normalform
6) Interpretation der Multiplikation und Division mit Hilfe der Polarform
7) Eulersche Formel und Euleridentität
8) Komplexe Funktionen (z.B. Seite 20-21 im Hainscho-Skript) bzw. der erste Film (Kapitel 6)
9) Anwendung in der E-Technik
10) Mandelbrotmenge als wiederkehrende Iteration, Fraktale, Anwendung in Technik (Antenne, siehe Film 2) oder Filmen (Special Effects in Star Wars, siehe Film 2), Xaos

## Methodische Hinweise

Die Unterrichtseinheit lässt sich mit den vorhandenen Materialien sehr gut komplett selbstorganisiert durchführen. Gerade für die Motivation der Unterrichtseinheit, für die komplexe Funktionen und die Anwendungen der komplexen Zahlen in der Technik bieten sich auch lehrerzentrierte Abschnitte an.

## Fachliche Hinweise

Aufgrund der jeweiligen Vorteile bei der Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division/Potenzrechnung lohnt es sich, sowohl die Koordinatenform als auch die Polarform einzuführen und die jeweilige Umrechnung, z.B. über die trigonometrische Form zu besprechen.

Mit Hilfe der Komplexen Zahlen lassen sich trigonometrische Identitäten, wie z.B. sin(2x)=2*sin(x)*cos(x), die bisher als gegeben in Formelsammlungen standen, sehr einfach herleiten.

Die Eulersche Identität als „schönste Formel der Mathematik“ sollte im Rahmen der Unterrichtseinheit den ihr gebührenden Platz bekommen, wobei es fast egal ist, welche der Formen ($e^{2\pi i}=1$, $e^{2\pi i}-1=0$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\pi i}+1=0$) man verwendet.

Die komplexen Funktionen haben ihren Reiz in der Problematik, dass man eigentlich den $R^4$ zum Zeichnen benötigen würde. Mit den Schülerinnen und Schülern kann man sehr einfach überlegen, in wieweit der $R^3$ oder $R^2$ ebenfalls reichen würde, und darauf aufbauend Schaubilder erzeugen.

Die Mandelbrotmenge überzeugt aufgrund ihrer Schönheit und Selbstähnlichkeit und ermöglicht auf ästhetischem Weg einen sehr einfachen Zugang zu den komplexen Zahlen. Die erzeugende Folge ($z_{n+1}=z_n^2+c$, wobei $z_0=0$ für alle komplexen Zahlen c) ist einfach zu verstehen und zu berechnen. Xaos berechnet hier sehr schnell Bilder der Menge, für welche die Folge beschränkt bleibt.

## Unterrichtsmaterialien

### Digitale Werkzeuge, Videos, …..

Filme und Filmsequenzen:

Zwei größere Filmprojekte beschäftigen sich mit dem Thema komplexe Zahlen, wobei der Fokus beim zweiten Film vorrangig bei den Fraktalen als Anwendung liegt.

- "Dimensions by Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez",
  www.dimensions-math.org/
  Ist eine Homepage mit einer Sammlung von Filmen. Kapitel 5 und 6 des Film geben einen Überblick über komplexe Zahlen, der einen andersartigen Einstieg ermöglicht.
- *Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension,* (ARTE),
  Ein Film von Michael Schwarz und Bill Jersey, der seit 2008 dreimal bei ARTE lief. Teile des Films können im Unterricht ebenfalls gut verwendet werden. Hier ist der Abschnitt über Special Effects in Star Wars (ab 11:15 im zweiten Teil) und Antennen (ab 2:36 im dritten Teil) besonders interessant. Eine Suche nach dem Titel mit einschlägigen Suchmaschinen erleichtert das Auffinden.

Unterrichtseinheiten:

- Mag. Gerhard Hainscho: Workshop komplexe Zahlen, www.acdca.ac.at/material/kl7/7c_wshop.pdf
  Ein Workshop zu komplexen Zahlen von einem österreichischen Mathematiklehrer aus dem Jahr 2000. Teile des Workshops sind verwendbar obwohl die Programme auf den TI Voyage 200 oder TI 92+ zugeschnitten sind. Der TI nspire CAS nutzt dieselben Befehle, die Programme kann man jedoch nicht mehr verwenden. Interessant für Technische Gymnasien sind insbesondere die Seiten 12 und 13, weil hier eine Anwendung der komplexen Zahlen in der Elektrotechnik erklärt wird.
- „Mathematik kompakt für Ingenieure und Informatiker“ von Yvonne Stry und Rainer Schwenkert, ISBN: 978-3-642-24326-4 (Print) 978-3-642-24327-1 (Online) http://w3-o.cs.hm.edu/~rschwenk/buch.htm
  Zum Buch gibt es eine 96-seitige Foliensammlung, die das Thema umfassend abhandelt, inklusive dem Beispiel zur Elektrotechnik und den Fraktalen
- „Komplexe Zahlen (Leitprogramm)“ von Christina Diehl, Marcel Leupp, ETH Zürich www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/kz
  Ein sehr umfangreiches Skript über mehr als 100 Seiten mit sehr vielen Aufgaben, Kapiteltests und Lösungen.
  Ziel des Skripts ist, dass Schüler sich der Sek II die Grundlagen zum Themenbereich in 8-10 Schulstunden selbst erarbeiten.

Webseiten:

- www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html
- www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/analysis/complzahlen/index.html/
- www.komplexe-zahlen.de/

Programme:

- Xaos: Fraktalzeichner, http://matek.hu/xaos/doku.php

Arbeitsblätter mit Übungsaufgaben

Im Internet gibt es zahlreiche Übungsaufgaben, die Unterrichtende für ihre Schülerinnen und Schüler oder Studenten zum Thema komplexe Zahlen hochgeladen haben. Mit den richtigen Suchbegriffen wird man hier schnell fündig.

## Aufgaben

Mögliche Klassenarbeitsaufgaben:

### Aufgabe 1:

Die Gleichung $x^3-5x^2+9x=5$ besitzt im Komplexen die Lösungen $x_1=1$, $x_2=2-i$ und $x_3=2+i$.

a) Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass $x_2=2-i$ eine Lösung dieser Gleichung ist!
b) Wie geht $x_3$ aus $x_2$ hervor (soll heißen: In welcher Beziehung steht $x_3$ zu $x_2$)? Wie nennt man solche Zahlenpaare?
c) Berechnen Sie den Betrag von $x_2$ aus $x_3$!
d) Welche Lösungen besitzt die Gleichung im Reellen?

### Aufgabe 2:

Gegeben sind folgende komplexe Zahlen:

$z_1=3+4i$ $z_2=$ $z_3=$ $z_4=$

a) Zeichnen Sie $z_1$ bis $z_4$ in der Gaussschen Zahlenebene ein! (Hinweise: )
b) Berechnen Sie
   I. $z_1+z_2$
   II. $z_1*z_2$
   III. $z_3*z_4$
   IV. $z_2*z_3$
   V. $z_3/z_4$

   und zeichnen Sie das Ergebnis ein!
c) Wandeln Sie $z_2$ in Polarform um! (Hinweise: siehe Tabelle rechts)

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 1 | 0 |
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 45° | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | 1 | 0 | |

d) Wandeln Sie $z_3$ in Koordinatenform um!
e) Erklären Sie, was Addition und Division komplexer Zahlen grafisch bedeutet!
f) Zeichnen Sie $z_1$ bis $z_4$ in der Gaussschen Zahlenebene ein! (Hinweise: $\sqrt{2} \approx 1{,}141$ ; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)
g) Erklären Sie, wie man eine $z_1$ in Polarform umwandeln könnte!
h) Erklären Sie, was Addition und Division komplexer Zahlen grafisch bedeutet!

### Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie sin (2x) über den Umweg $e^{i2x}$

Oder

b) Berechnen Sie sin (2π/3) mit Hilfe der eulerschen Beziehung

**Aufgabe 4:**
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck in der Gaussschen Zahlenebene. Wenden Sie darauf die Funktionen

a) f(z)=z*i
b) f(z)=(z-1)*i+z

an.
Beschreiben Sie jeweils die Bewegung des Dreiecks.

## Literaturhinweise und Quellen

www.dimensions-math.org/
www.youtube.com/watch?v=N4N4Fv5BMOA
www.acdca.ac.at/material/kl7/7c_wshop.pdf
http://w3-o.cs.hm.edu/~rschwenk/buch.htm
www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html
www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/ sek2/analysis/complzahlen/index.html/
www.komplexe-zahlen.de/
www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/kz
http://matek.hu/xaos/doku.php
www.welt.de/print-welt/article318333/Die-schoenste-Formel-der-Mathematik-wurde-im-18-Jahrhundert-in-Berlin-entdeckt.html