Einstieg

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - \cos(x)$.

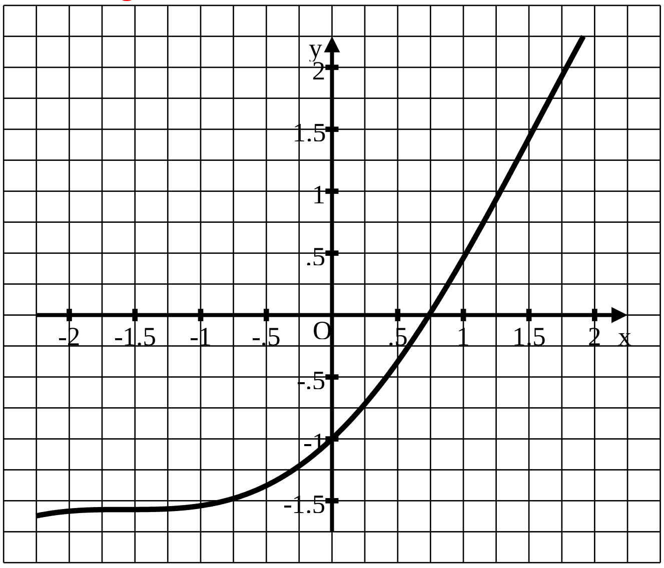
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Intervallhalbierungsverfahrens die Nullstelle dieser Funktion und bewerten Sie die Konvergenzgeschwindigkeit.

c) Ermitteln Sie nun die Gleichung der Tangente an das Schaubild f im Punkt $P\left(0{,}8 \middle| f(0{,}8)\right)$ sowie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse.
Vergleichen Sie das Verfahren aus Teilaufgabe b) mit dieser Methode hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit. Was fällt Ihnen auf?

Lösungsvorschlag

a)



b) Intervallhalbierungsverfahren:

Aufgrund der Zeichnung in Teilaufgabe a) lässt sich bereits das kleine Intervall [0,7;0,8] erkennen, das die anzunähernde Nullstelle beinhalten muss. Dies kann rechnerisch durch $f(0{,}7) < 0$ und $f(0{,}8) > 0$ belegt werden. Daher kann als erstes Intervall [0,7;0,8] gelten.

Die weiteren Intervalle, die sich mithilfe des Intervallhalbierungsverfahrens ergeben, lauten:

$m_1 = 0{,}75: f(0{,}7) < 0 \; und \; f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7; 0{,}75]$

$m_2 = 0{,}725: f(0{,}725) < 0 \; und \; f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}725; 0{,}75]$

$m_3 = 0{,}7375: f(0{,}7375) < 0 \; und \; f(0{,}75) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7375; 0{,}75]$

$m_4 = 0{,}74375: f(0{,}7375) < 0 \; und \; f(0{,}74375) > 0 \rightarrow neues\ Intervall: [0{,}7375; 0{,}74375]$

Wenn nun wieder die Mitte des Intervalls gewählt wird, ergibt sich nach 4 Schritten die Nullstelle von $f(x) = x - \cos(x)$ auf zwei Dezimalstellen gerundet bei $x \approx 0{,}74$. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens wirkt nicht sonderlich schnell.

c) Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$, $P\big(0{,}8 \big| f(0{,}8)\big)$

$f(0{,}8) \approx 0{,}103$, $f'(0{,}8) \approx 1{,}717 \rightarrow y = 1{,}717(x - 0{,}8) + 0{,}103 = 1{,}717x - 1{,}27$

$y = 0 \rightarrow x \approx 0{,}74$

Das Ergebnis, das mit dem Intervallhalbierungsverfahren erst nach 4 Schritten erzielt wird, stellt sich bei dem Verfahren mit der Tangente unmittelbar im ersten Schritt ein.

→ Es gibt effizientere Verfahren als die bisher bekannten!