

Einführung in das mathematische Arbeiten am Beispiel kubischer Gleichungen

Ausgangsfragestellung:

In der Mittelstufe wird die quadratische Lösungsformel

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$$

zum Lösen quadratischer Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ gelehrt.

Für Gleichungen dritten Grades $x^3 + px + q = 0$ gibt es ebenfalls eine Lösungsformel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

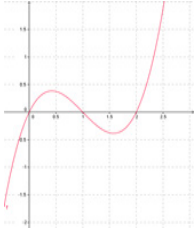
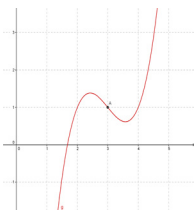
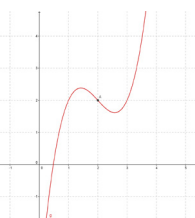
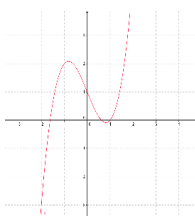
Die Frage ist: Weshalb wird diese Lösungsformel in der Schule nicht unterrichtet?

Auf dem Weg zu einer Antwort: Erste Beispiele für mathematisches Arbeiten

- Ausgehend von konkreten Beispielen ergeben sich Vermutungen, die sich allgemein belegen lassen, um so zu allgemeingültigen Aussagen zu kommen, die dann bewiesen werden.
- Um möglichst viele Beispiele miteinander vergleichen zu können, werden die einzelnen Aufgaben arbeitsteilig gelöst und anschließend auf einem Plakat zusammengetragen. Eine zeitliche Koordination ergibt sich durch die Unterteilung der Arbeitszeit in drei Arbeitsphasen.

1. Phase Teil 1

- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen mit Geogebra.
- Berechnen Sie die x-Koordinate des Wendepunktes Ihrer Funktion, notieren Sie die x-Koordinate des Wendepunktes auf dem Plakat. Achten Sie darauf, dass der Funktionsterm zum Funktionsgraphen passt.

Graph	Funktionsterm	Wendepunkt	verscho bene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$
	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	WP(1/0)	$f_v(x) = x^3 - x$	$\frac{-1^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen
				
				
				

1. Phase Teil 2

- Analysieren Sie auch die Ergebnisse Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie man aus der Funktionsgleichung die x-Koordinate des Wendepunktes ohne Rechnung ablesen kann.
- Formulieren Sie diese Vermutung schriftlich auf einer Metaplankarte, und hängen Sie Ihre Vermutung ebenfalls auf das Plakat.
- Weisen Sie nach, dass Ihre Vermutung wahr ist, betrachten Sie dazu die allgemeine normierte Form $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ und berechnen Sie allgemein den x-Wert des Wendepunktes.

Falls Sie nicht weiterkommen, liegt ein Hinweis bereit.

2. Phase Teil 1

- Verschieben Sie den Funktionsgraphen mit Geogebra so, dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt.
- Der mit Geogebra ermittelte Funktionsterm ist unter Umständen etwas ungenau. Deshalb ist ein exakter Nachweis erforderlich. Berechnen Sie von Hand oder mit dem CAS Tool von Geogebra den Funktionsterm der verschobenen Funktion und tragen Sie diesen ebenfalls auf dem Plakat ein.

2. Phase Teil 2

- Betrachten Sie die Ergebnisse Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Vergleichen Sie die Funktionsterme vor mit denen nach der Verschiebung. Formulieren Sie wiederum eine Vermutung.
- Weisen Sie die Vermutung anhand der allgemeinen normierten Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ nach.}$$

Falls Sie Unterstützung brauchen liegt ein Hinweis bereit.

3. Phase

- Nehmen Sie sich das Arbeitsblatt 3. Phase und bearbeiten Sie die Aufgaben.

Besprechung 3. Phase

Satz: Wenn gilt $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \geq 0$ ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

eine Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Besprechung 3. Phase

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$ eine Lösung, d. h. eine Nullstelle

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$ zwei Lösungen, d. h.

$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ drei

Interpretieren Sie die Ergebnisse der mathematischen
Forschungsreise vor dem Hintergrund unserer
Ausgangsfrage:

Weshalb wird die Lösungsformel $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} +$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

in der Schule nicht unterrichtet?

Antworten

- Die Formel ist einfach aber unzuverlässig, in dem Sinne, dass sie nur für den Fall einer Nullstelle eine Lösung liefert, für die beiden anderen Fälle versagt die Formel.
- Die folgenden Beispiele zeigen, dass sie aber selbst für den Fall einer Nullstelle unbefriedigende Lösungen liefert.

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \quad \text{ok}$$

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3^3}{27} + \frac{4^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3^3}{27} + \frac{4^2}{4}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

Nicht ok.

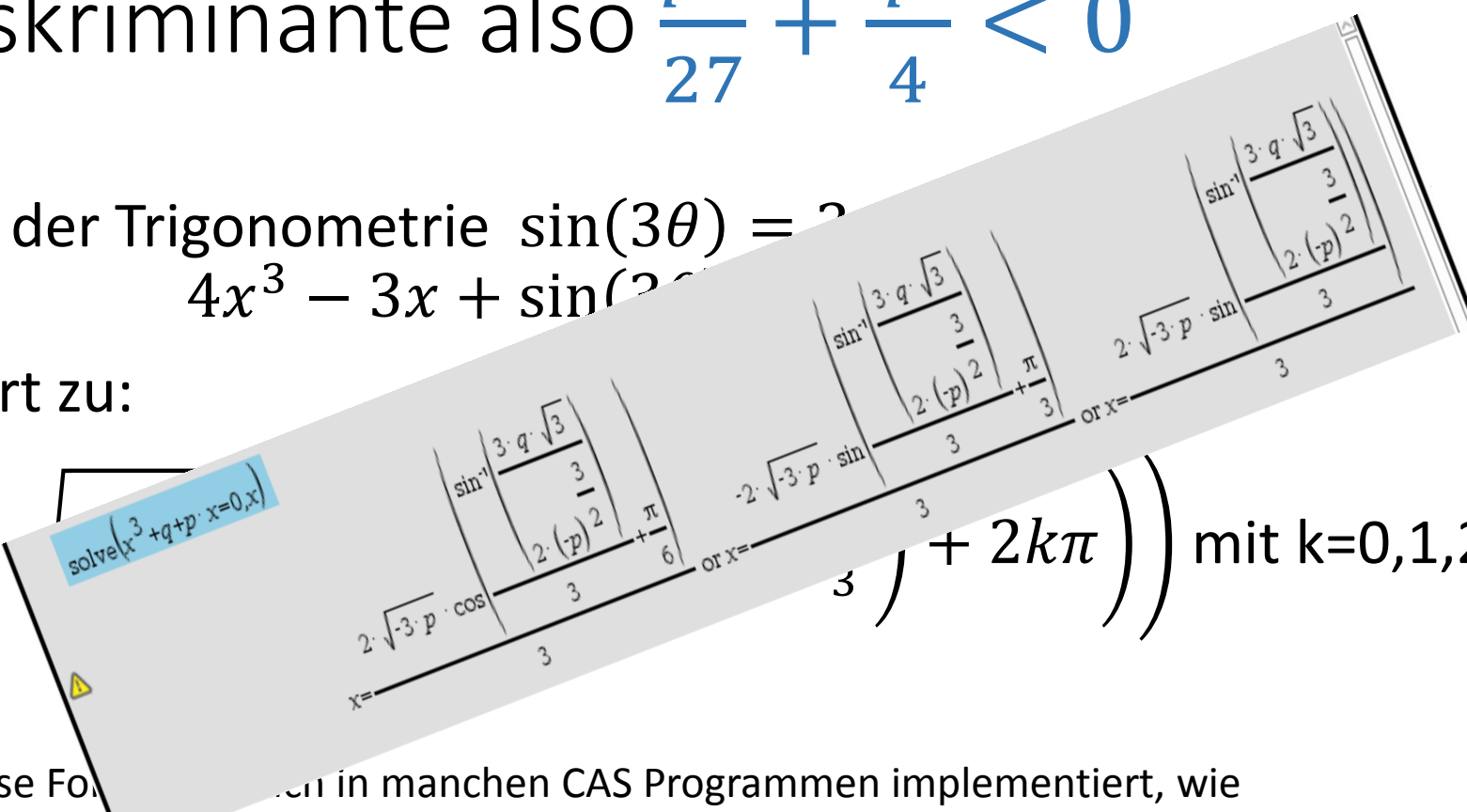
Denn $x = 1$ ist eine Lösung ,
die Gleichung kann aber nur
eine Lösung haben. D. h. hier
kann man nicht ohne
Weiteres erkennen, dass die
Lösung ganzzahlig ist.

Ausblick für den Fall einer negativen
Diskriminante also $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$

Aus der Trigonometrie $\sin(3\theta) = \frac{q}{2 \cdot \sqrt{-3 \cdot p}}$
 $4x^3 - 3x + \sin(2\theta) = 0$

Führt zu:

$x = \left(\sqrt[3]{\frac{2 \cdot \sqrt{-3 \cdot p} \cdot \cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{3 \cdot q \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (-p)^2}\right) + \frac{\pi}{6}}{3}\right)}{3}} \right. \left. \text{or } x = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \sqrt{-3 \cdot p} \cdot \sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{3 \cdot q \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (-p)^2}\right) + \frac{\pi}{6}}{3}\right)}{3}} \right) + 2k\pi \Bigg) \text{ mit } k=0,1,2$



Diese Formeln sind in manchen CAS Programmen implementiert, wie
der Screenshot zeigt.