**Irrationalität von und**

**Didaktische Vorbemerkungen**

Der Beweis für die Irrationalität von ist ein Standardbeispiel für das Prinzip des Widerspruchsbeweises (vgl. auch Hinweise zum indirekten Beweis).

Man kann die Schülerinnen und Schüler diesen Beweis auf die Irrationalität von übertragen lassen und anschließend die Frage aufwerfen, warum der Beweis nicht auf übertragbar ist. Die Übertragung fällt leichter, wenn man im Beweis für statt „gerade“ von „durch 2 teilbar“ spricht (oder dies den Schülern als Hinweis gibt.)

Anschließend wird noch ein sehr ausführlicher alternativer Beweis für die Irrationalität von vorgeführt (vgl. Arbeitsblatt). Man könnte die Schülerinnen und Schüler den Beweistext lesen und sie dann die Unterschiede zum ersten Beweis herausarbeiten lassen. Die Schüler erfahren dabei, dass man Behauptungen auf verschiedene Arten beweisen kann und sie üben sich zudem im Lesen mathematischer Texte.

Unter einer „natürlichen Zahl“ ist im Folgenden stets eine von Null verschiedene natürliche Zahl zu verstehen.

**Satz:** ist irrational.

Beweis (durch Widerspruch).

Wir nehmen an, dass eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen und geben, so dass gilt:

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

Daraus ergibt sich, dass eine gerade Zahl ist. Daher muss auch eine gerade Zahl sein. Also gibt es eine natürliche Zahl, so dass gilt: . Damit hat man. Setzt man dies in Gleichung ein, so erhält man

Damit erweist sich als gerade Zahl. Folglich ist auch gerade. Da sich somit sowohl als auch als gerade Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von und Also ist irrational.

**Satz:** ist irrational.

Beweis (analog zum Beweis von )

Wir nehmen an, dass eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen und geben, so dass gilt:

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

Daraus ergibt sich, dass durch 3 teilbar ist. Daher muss auch durch 3 teilbar sein. Also gibt es eine natürliche Zahl, so dass gilt: . Damit hat man. Setzt man dies in Gleichung ein, so erhält man

Damit erweist sich als durch 3 teilbare Zahl. Folglich ist auch durch 3 teilbar. Da sich somit sowohl als auch als durch 3 teilbare Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von und Also ist irrational.

**Arbeitsblatt** (alternativer Beweis durch Widerspruch).

**Satz:** ist irrational.

Beweis. Wir nehmen an, dass eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen und geben, so dass gilt:

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

Wenn gerade ist, ist es auch und ebenso. Also muss in diesem Fall wegen auch und damit gerade sein. Da dies aber der Teilerfremdheit von und widersprechen würde, müssen folglich die Zahlen und beide ungerade sein. Daher gibt es natürliche Zahlen und, so dass gilt:  
 ein, so folgt:  
   
Daraus ergibt sich:

Und

Subtraktion von und anschließende Division durch zwei ergeben:

Isoliert man die auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man:

Klammert man links eine 2 aus, so folgt  
  
Auf der linken Seite der Gleichung steht 0 oder eine durch 2 teilbare Zahl, auf der rechten Seite steht 1, das ist ein Widerspruch, womit die Irrationalität von bewiesen ist.