

Einstieg in LPE 2

Optische Täuschungen zeigen, dass man die eigene Wahrnehmung hinterfragen muss. Von diesen Spielereien ausgehend kann man auf reale Situationen eingehen, die Beweise bedürfen, wie beispielsweise die Frage nach der Schuld oder Unschuld eines Angeklagten. Der Übergang zur Mathematik kann durch folgende Beispiele erfolgen. Für „mathematische optische Täuschungen“ steht ein Arbeitsblatt zur Verfügung.

Beispielliste:

1. „64 = 65“ und ähnliche Legespiele
2. Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.
Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein größtes Element.
3. Fermatzahlen: $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: Alle Zahlen F_n sind Primzahlen.
4. Die Diagonalen in jedem Viereck schneiden sich.
5. ...

Didaktisch-methodische Hinweise (zu den Beispielen)

Das Legespiel „beweist“ eine offensichtlich falsche Aussage, die die Schüler mit Papier und Schere selbst nachvollziehen können.

Beide Aussagen bei 2. sind ähnlich und vermeintlich richtig, bei genauerer Betrachtung erweist sich die zweite Aussage als falsch. Die erste Aussage lässt sich mit einfachen Argumenten beweisen, für die zweite Aussage reicht ein Gegenbeispiel, um sie zu widerlegen.

Die Fermatzahlen lassen sich bis $n = 5$ mit Hilfe eines Taschenrechners leicht berechnen: 3, 5 und 17 erkennt der Schüler sofort als Primzahl, 257 lässt sich mit etwas Aufwand auch als Primzahl erkennen, 65537 weckt den Wunsch nach einem effizienteren Primzahltest, 4294967297 hat den Teiler 641. Historisch gesehen hatte Euler diese Erkenntnis 95 Jahre nach Fermats falscher Behauptung. Heute kann man mit Hilfe eines geeigneten digitalen Mathematikwerkzeugs die Faktorisierung schnell herstellen.

Aufgrund der bisherigen Beispiele werden die Schüler versuchen, ein Viereck zu finden, das als Gegenbeispiel dient. Z. B.

