

## Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$

### Didaktische Vorbemerkungen

Der Beweis für die Irrationalität von  $\sqrt{2}$  ist ein Standardbeispiel für das Prinzip des Widerspruchsbeweises (vgl. auch Hinweise zum indirekten Beweis).

Man kann die Schülerinnen und Schüler diesen Beweis auf die Irrationalität von  $\sqrt{3}$  übertragen lassen und anschließend die Frage aufwerfen, warum der Beweis nicht auf  $\sqrt{4}$  übertragbar ist. Die Übertragung fällt leichter, wenn man im Beweis für  $\sqrt{2}$  statt „gerade“ von „durch 2 teilbar“ spricht (oder dies den Schülern als Hinweis gibt.)

Anschließend wird noch ein sehr ausführlicher alternativer Beweis für die Irrationalität von  $\sqrt{3}$  vorgeführt (vgl. Arbeitsblatt). Man könnte die Schülerinnen und Schüler den Beweistext lesen und sie dann die Unterschiede zum ersten Beweis herausarbeiten lassen. Die Schüler erfahren dabei, dass man Behauptungen auf verschiedene Arten beweisen kann und sie üben sich zudem im Lesen mathematischer Texte.

Unter einer „natürlichen Zahl“ ist im Folgenden stets eine von Null verschiedene natürliche Zahl zu verstehen.

**Satz:**  $\sqrt{2}$  ist irrational.

Beweis (durch Widerspruch).

Wir nehmen an, dass  $\sqrt{2}$  eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  geben, so dass gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 2n^2 = m^2. \quad (*)$$

Daraus ergibt sich, dass  $m^2$  eine gerade Zahl ist. Daher muss auch  $m$  eine gerade Zahl sein. Also gibt es eine natürliche Zahl  $k$ , so dass gilt:  $m = 2k$ . Damit hat man  $m^2 = 4k^2$ . Setzt man dies in Gleichung (\*) ein, so erhält man

$$2n^2 = 4k^2 \quad \text{oder} \quad n^2 = 2k^2.$$

Damit erweist sich  $n^2$  als gerade Zahl. Folglich ist auch  $n$  gerade. Da sich somit sowohl  $m$  als auch  $n$  als gerade Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $m$  und  $n$ . Also ist  $\sqrt{2}$  irrational.

**Satz:**  $\sqrt{3}$  ist irrational.

Beweis (analog zum Beweis von  $\sqrt{2}$ )

Wir nehmen an, dass  $\sqrt{3}$  eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  geben, so dass gilt:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 3n^2 = m^2. \quad (*)$$

Daraus ergibt sich, dass  $m^2$  durch 3 teilbar ist. Daher muss auch  $m$  durch 3 teilbar sein.

Also gibt es eine natürliche Zahl  $k$ , so dass gilt:  $m = 3k$ . Damit hat man  $m^2 = 9k^2$ . Setzt man dies in Gleichung (\*) ein, so erhält man

$$3n^2 = 9k^2 \quad \text{oder} \quad n^2 = 3k^2.$$

Damit erweist sich  $n^2$  als durch 3 teilbare Zahl. Folglich ist auch  $n$  durch 3 teilbar. Da sich somit sowohl  $m$  als auch  $n$  als durch 3 teilbare Zahlen erwiesen haben, besteht ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $m$  und  $n$ . Also ist  $\sqrt{3}$  irrational.

### Arbeitsblatt (alternativer Beweis durch Widerspruch).

**Satz:**  $\sqrt{3}$  ist irrational.

Beweis. Wir nehmen an, dass  $\sqrt{3}$  eine rationale Zahl ist. Dann muss es teilerfremde natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  geben, so dass gilt:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$

Durch quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad 3n^2 = m^2. \quad (*)$$

Wenn  $n$  gerade ist, ist es auch  $n^2$  und  $3n^2$  ebenso. Also muss in diesem Fall wegen (\*) auch  $m^2$  und damit  $m$  gerade sein. Da dies aber der Teilerfremdheit von  $m$  und  $n$  widersprechen würde, müssen folglich die Zahlen  $m$  und  $n$  beide ungerade sein. Daher gibt es natürliche Zahlen  $k$  und  $h$ , so dass gilt:

$$m = 2k - 1 \quad \text{und} \quad n = 2h - 1.$$

Setzt man dies in (\*) ein, so folgt:

$$3(2k - 1)^2 = (2h - 1)^2$$

Daraus ergibt sich:

$$3(4k^2 - 4k + 1) = 4h^2 + 4h + 1$$

Und

$$12k^2 - 12k + 3 = 4h^2 + 4h + 1.$$

Subtraktion von 3 und anschließende Division durch zwei ergeben:

$$6k^2 - 6k = 2h^2 + 2h - 1.$$

Isoliert man die 1 auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man:

$$-6k^2 + 6k + 2h^2 + 2h = 1.$$

Klammert man links eine 2 aus, so folgt

$$2(-3k^2 + 3k + h^2 + h) = 1.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht 0 oder eine durch 2 teilbare Zahl, auf der rechten Seite steht 1, das ist ein Widerspruch, womit die Irrationalität von  $\sqrt{3}$  bewiesen ist.